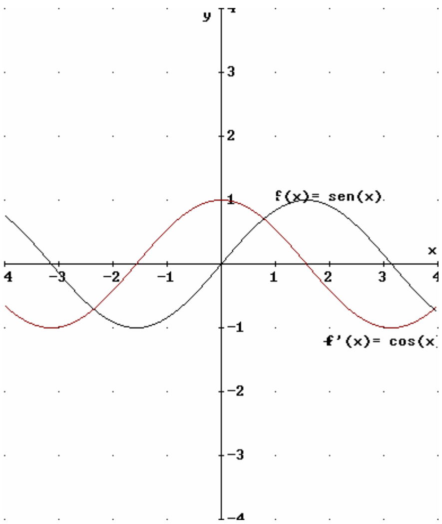
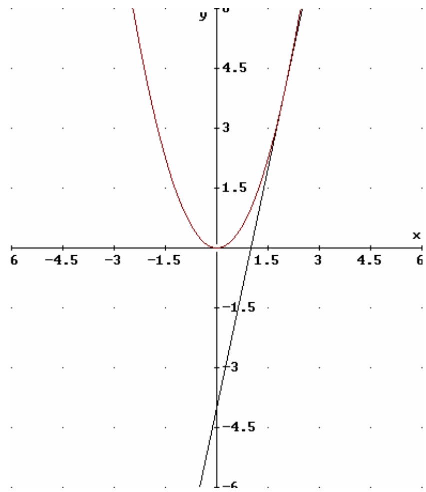
# Universidad Nacional de Salta

# Facultad de Ciencias Exactas



# DERIVADA Y DIFERENCIAL

**Prof. María de las Mercedes Moya**

**2005**

## Introducción

Uno de los debates más agrios que registra la Historia de la Ciencia es el que sostuvieron Newton y Leibniz y sus respectivos partidarios sobre la prioridad del descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. Esto ocurrió a fines del siglo XVII. La gran disputa era sobre quien había copiado a quien. Lo más curioso del caso es que el asunto en litigio no existía realmente, puesto que las investigaciones de Leibniz y de Newton eran completamente distintas.

Newton y Leibniz son dos espíritus diferentes. Newton es inglés y Leibniz alemán: Newton permanece fiel a la tradición griega, y Leibniz sueña con una combinatoria universal, Newton es un poco arbitrario y artificial y Leibniz es un metodista que se acerca más a Descartes que su ilustre adversario; Newton es un enamorado de lo bello y armonioso, lo que le obliga a oponerse al carácter mecánico del Álgebra y Leibniz se siente irresistiblemente atraído por el idioma universal simbólico de las generalizaciones algebraicas, que le conduce a hacer asumir al racionalismo categoría de dogma.

Con el tiempo se demostró que ninguno de ellos copió al otro. Newton fue el primero en concebir las principales ideas pero Leibniz las descubrió independientemente.¿Inmensa casualidad?. NO!, el momento histórico lo propiciaba y ellos, los genios, estaban allí.

¿Qué tuvo aquella época que favoreció el descubrimiento del cálculo diferencial? La matemática lo estaban pidiendo para poder resolver, por ejemplo los complicados problemas astronómicos que con la invención del telescopio habían surgido.

Pero la matemática (y las Ciencias en general) no son más que algunas manifestaciones de una época en la que se rompe con las concepciones estáticas de épocas anteriores y se atiende al movimiento, al dinamismo.

## El problema de la Tangente

El primer problema es muy antiguo; data del gran científico griego Arquímedes (287 – 212 a.C). Nos referiremos a ese problema como el de la *línea tangente.*

El segundo problema es más reciente. Creció con los intentos de Kepler (1571 – 1630), Galileo (1571 – 1642), Newton (1642 – 1727), Leibniz ( 1646 – 1716) y otros por describir la velocidad de un cuerpo móvil. Es el problema de la *velocidad instantánea.*

Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no tener mucha relación. Las apariencias engañan, ya que los dos problemas son idénticos.

Comenzaremos a describir el problema de la recta tangente y luego el de la velocidad.

La noción de Euclides de una tangente como una línea que toca a la curva en un solo punto es correcta para el círculo. Esta definición es muy restrictiva pero a la vez muy amplia. Con esta definición, el círculo admitiría una tangente (fig. 1) . En la fig. 2 la curva no admitiría ninguna tangente, y en la fig 3 la curva admitiría dos tangente en el punto marcado.

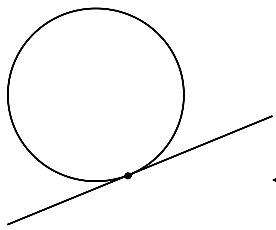


Fig. 1

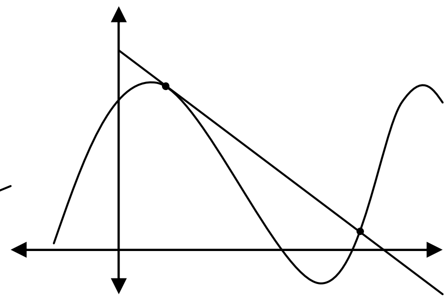


Fig. 2

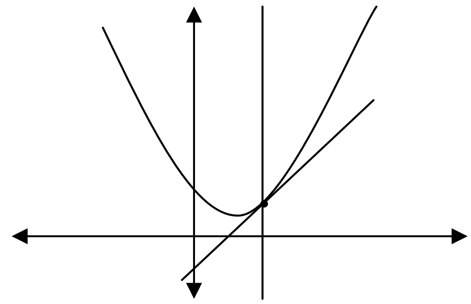


Fig. 3

Es necesario entonces pensar en otra manera de definir *tangente* a una curva en un punto dado.

La idea intuitiva es esta: La recta tangente L debe ser la línea recta que pasa a través de un punto arbitrario P de una curva f(x) y que tiene la misma dirección que la curva en P. Ya que la dirección de una recta queda determinada por la dirección de su pendiente, el plan para definir la recta tangente equivale a encontrar una fórmula de "predicción de la pendiente", que dará la pendiente aproximada de la recta tangente.

Como conocemos las coordenadas del punto $P(x_0, f(x_0))$, podemos encontrar otra recta cuya pendiente podemos calcular.

Consideremos una función continua en un punto $x = x_0$. Sea $h \neq 0$ y los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$ distintos.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es de la forma:

$$\frac{\mathbf{y - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} = \frac{\mathbf{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\mathbf{x_0 + h - x_0}} \quad \textbf{en consecuencia} \quad \frac{\mathbf{y - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} = \frac{\mathbf{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\mathbf{h}}$$

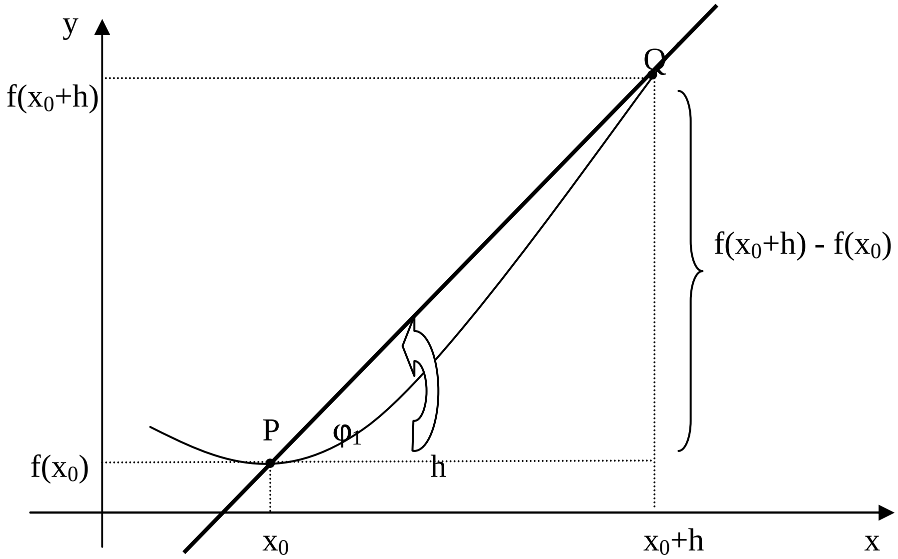
**y por lo tanto la ecuación quedará de la forma :**

$$\mathbf{y} = \underbrace{\frac{\mathbf{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\mathbf{h}}}_{\textbf{pendiente}} .(\mathbf{x - x_0}) + \mathbf{f(x_0)}$$

Esta recta así definida, no es otra cosa que la "secante" que pasa por los puntos P y Q.

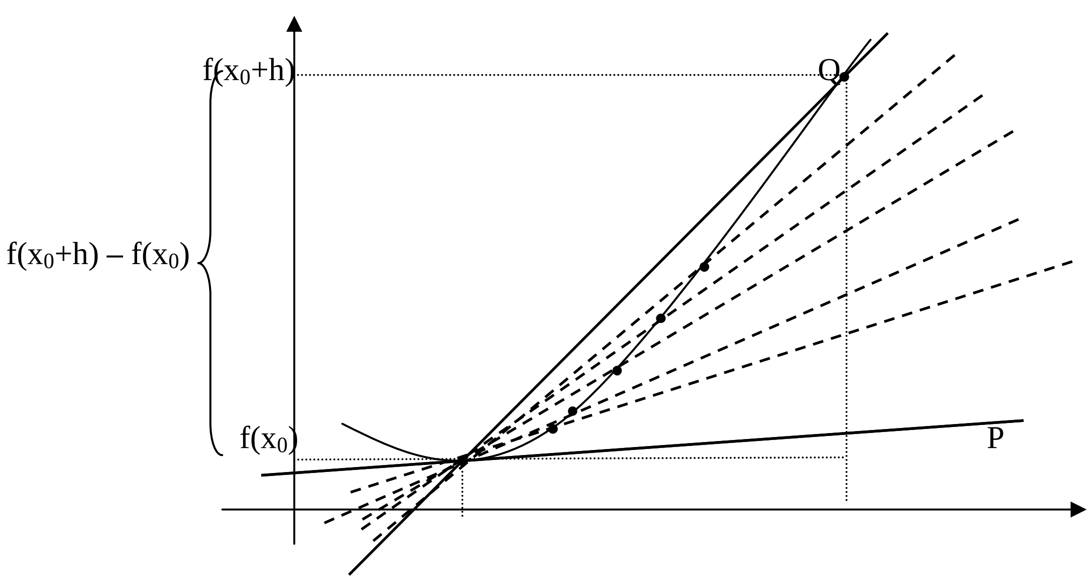
La diferencia de las absisas de los puntos P y Q la llamaremos h, o "incremento", o "cambio", en el valor de las x. Análogamente podemos pensar en la diferencia de las ordenadas de los puntos P y Q, el cual será $f(x_0+h) - f(x_0)$.

Veamos en un gráfico la interpretación geométrica de estos conceptos.




Sabemos que $m = \text{tag}\ \varphi_1 = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

La idea es encontrar la recta tangente en el punto ($x_0$, $f(x_0)$) como límite "en algún sentido" de estas secantes, cuando h se aproxima a cero. Hasta ahora no hablamos de límites de rectas pero podemos hablar de límites de sus pendientes. Cuando $h \to 0$ será que $(x_0+h) \to (x_0)$ y las rectas secantes tienden a hacerse tangentes en el punto ($x_0$, $f(x_0)$).




Imaginemos el punto P fijo y que el punto Q se desplaza por la curva en dirección a P; es decir, Q se aproxima a P. Esto equivale a decir que h tiende a cero. Conforme esto sucede, la secante gira sobre el punto fijo P. Si esta recta secante tiene una posición límite, es esta posición límite la que deseamos sea tangente a la gráfica en P. Se desea así que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de m cuando h tiende a cero, si dicho límite existe.

Resulta necesario fijar la idea de que una recta tangente en un punto P a una curva dada, es una recta que se aproxima tanto como se quiera a la curva en un entorno del punto P. De modo tal que en las cercanías del punto P, la recta y la curva se confunden. (Luego se visulalizará esto, mediante un ejemplo).

Si el límite de la pendiente cuado h tiende a cero da ∞ ó -∞, entonces cuando h tiende a cero, la recta PQ se aproxima a la recta que pasa por P, la cual es paralela al eje y. En este caso queremos que la recta tangente a la gráfica en P sea la recta, $x = x_0$.

Este análisis nos lleva a la siguiente:

**Definición:**

**Supongamos que f es continua en $x = x_0$. Entonces , *"la recta tangente"* a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:**

**i) la recta a través de P, cuya pendiente es $m(x_0)$ que se define como:**

$$m(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ si dicho límite existe}$$

**ii) la recta $x = x_0$ si:**

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

**o bien :**

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

**Si no se cumple i), y tampoco ii) no existe una recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$.**

El tipo de límite de la definición dada en i) sirve para determinar la pendiente de una recta tangente y es uno de los conceptos más importantes del cálculo. Es un concepto de uso muy frecuente y recibe un nombre específico.

# Derivada

**Definición:**

**Sea f definida en un entorno del punto $x_0$ de semiamplitud δ. La derivada de f en el punto $x_0$ está dada por:**

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ si dicho límite existe}$$

Se lee: Derivada de f en el punto $\mathbf{x_0}$. O bien simplemente f prima de $\mathbf{x_0}$.

También decimos que f es derivable en x = $\mathbf{x_0}$.

Por lo tanto de acuerdo a la definición anterior, decimos que: "la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de absisa x = $\mathbf{x_0}$".

Notar que la definición de derivada, así como la de límite y de continuidad es una definición **"puntual"**. Y por lo tanto hablamos de la derivada de una función en un punto determinado.

**Definición:**
**Para cualquier f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los x tales que f es derivable en x y cuyo valor para ese tal x viene dado por:**

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \text{ si dicho límite existe}$$

**f '(x) se llama "función derivada"**
**Cuando decimos que el f '(x) existe queremos significar que :**

$$\mathbf{f_+'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \text{ existe} \quad \text{y} \quad \mathbf{f_-'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \text{ existe}$$

**$f_+'(x)$ se llama derivada lateral por la derecha**

**$f_-'(x)$ se llama derivada lateral por la izquierda**

**y por lo tanto f ' existe cuando $f_+'(x) = f_-'(x)$**

Veamos ahora otras maneras de escribir la función derivada.

Si llamamos:
x: variable independiente

x + h: variable incrementada en un h

f(x): función valuada en el punto x

f(x+h): función incrementada

$\Delta y = \Delta f = f(x + h) - f(x)$ incremento de f

$\Delta x = h$ incremento de la variable independiente

En el punto $x = x_0$, podemos llamar $h = x - x_0$, entonces $x = x_0 + h$. De esta manera la definición de la derivada de la función en el punto $x_0$ quedará:

$$\mathbf{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Además existen diferentes notaciones para indicar la función derivada o la derivada de una función en un punto. Algunas de ellas son:

| **función derivada** | **derivada de una función f en el punto $x_0$** |
|---|---|
| $\mathbf{f'(x)}$ | $\mathbf{f'(x_0)}$ |
| $\mathbf{\dfrac{df}{dx}}$ | $\mathbf{\left.\dfrac{df}{dx}\right\vert_{x_0}}$ |
| $\mathbf{D[f(x)]}$ | $\mathbf{D[f(x_0)]}$ |
| $\mathbf{y'}$ | $\mathbf{y'(x_0)}$ |

Ejemplos:

1. Dada la función $f(x) = x^2$ , encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto de coordenadas (2,4) y luego la función derivada.

Solución:
La ecuación de la recta que pasa por un punto tiene la expresión: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$
Donde m indica la pendiente de la recta. Por lo tanto para calcular m debemos calcular la derivada de la función f en el punto de coordenadas (2,4). Asi:

$$\mathbf{m} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f(2+\mathbf{h})-\mathbf{f}(2)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{(2+\mathbf{h})^2-4}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{4+4\mathbf{h}+\mathbf{h}^2-4}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{h}(4+\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = 4$$

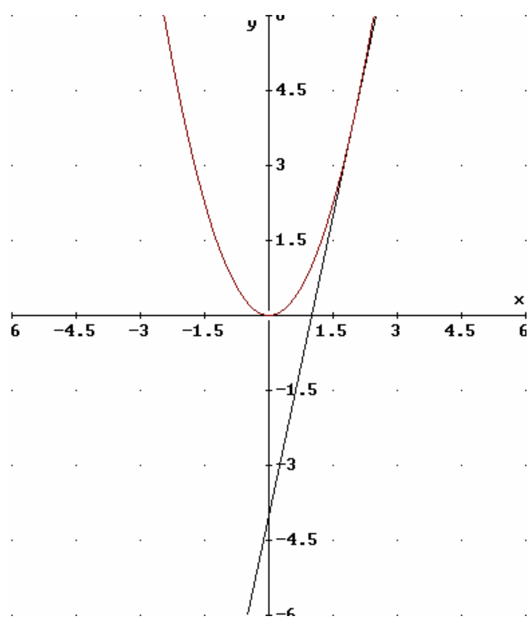
$\therefore \mathbf{m} = 4$ y por ende $f'(2) = 4$

La ecuación de la recta tangente en el punto de coordenadas (2,4) será :

$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$ o bien realizando las cuentas correspondientes

$y = 4x - 4$

El dibujo muestra la gráfica de la función f y la de su recta tangente en el punto de coordenadas (2,4)



Se puede observar que la recta corta al gráfico de f en un único punto (en este caso particular)

$y_1 = x^2$ $\qquad$ $y_2 = 4x - 4$

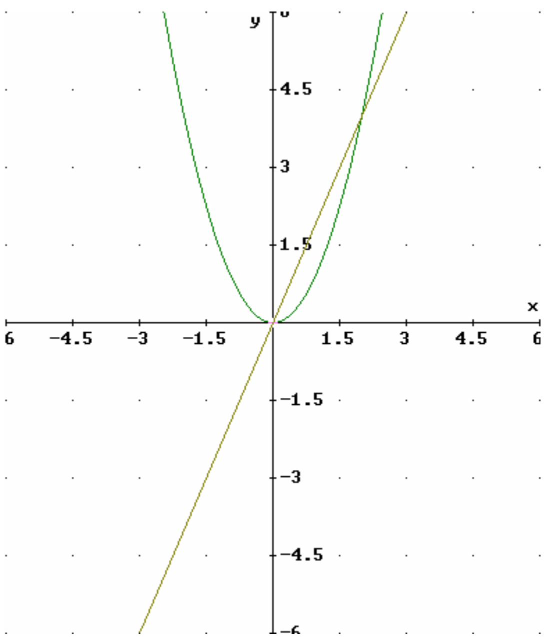
Así:

$x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ de donde resulta que $(x - 2)^2 = 0$ y por lo tanto $x = 2$ (raíces dobles reales iguales)

¿Cuál es la función derivada?

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathrm{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{h})^2-\mathbf{x}^2}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}\mathbf{h}+\mathbf{h}^2-\mathbf{x}^2}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{h}(2\mathbf{x}+\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = 2\mathbf{x}$$

$\therefore \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$




El dibujo muestra el gráfico de la función f y el de la función derivada de f.

2. Encontrar la derivada en x = 0 de la siguiente función:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}}{1+\mathbf{e}^{1/\mathbf{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Para ello, encontramos primero la derivada de la función f en el punto x = 0, aplicando la definición de límites. Así las cuentas quedarían:

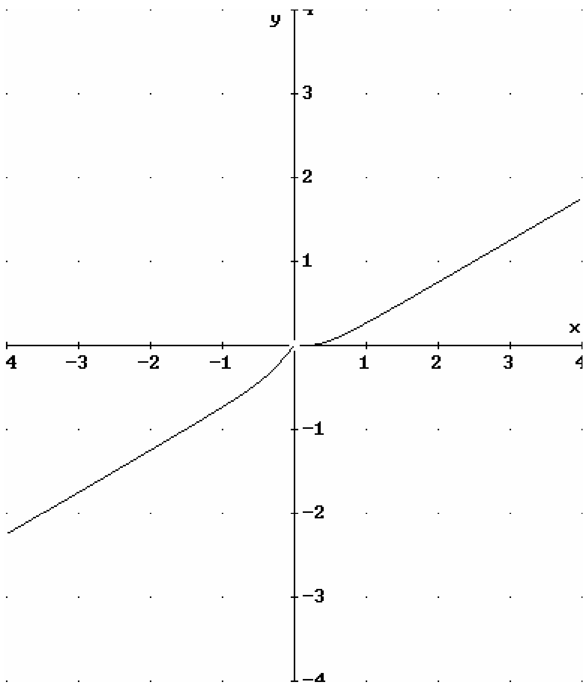
$$\mathbf{f}_+'(0) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{f(0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\frac{\mathbf{h}}{1+\mathbf{e}^{1/\mathbf{h}}}-0}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{1+\mathbf{e}^{1/\mathbf{h}}} = 0$$

$$\therefore \mathbf{f}_+'(0) = 0$$

$$\mathbf{f}_-'(0) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{f(0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{h}}}}} = 1$$

$$\therefore \mathbf{f}_-'(0) = 1$$

Por lo tanto $\mathbf{f}_+'(0) \neq \mathbf{f}_-'(0) \Rightarrow \mathbf{f}$ no es derivable en $x = 0$




El dibujo muestra el gráfico de la función f. Se puede observar que como la función no es derivable en x = 0 la gráfica de la misma presenta una punta en el origen. Esta es una manera visual de distinguir cuando una función es o no derivable en un punto.

3. Encontrar la función derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Solución:

Primero vemos si la función es derivable en el punto x = 0 aplicando la definición:

$$\mathbf{f}_+'(0) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathrm{f}(0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{h}-0}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h}} = 1$$

$$\therefore \mathbf{f}_+'(0) = 1$$

$$\mathbf{f}_-'(0) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathrm{f}(0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{h})-\mathbf{f}(0)}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathbf{h}^2-0}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \mathbf{h} = 0$$

$$\therefore \mathbf{f}_-'(0) = 0$$

Por lo tanto $\mathbf{f}_+'(0) \neq \mathbf{f}_-'(0) \Rightarrow \mathbf{f}$ no es derivable en $x = 0$

Sin embargo podemos definir la función derivada para todos aquellos puntos diferentes de cero. Para ello también aplicamos la definición en un punto genérico x. Así nos quedaría:

$$\mathbf{f}_+'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathrm{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^+} 1 = 1$$

$$\therefore \mathbf{f}_+'(\mathbf{x}) = 1$$

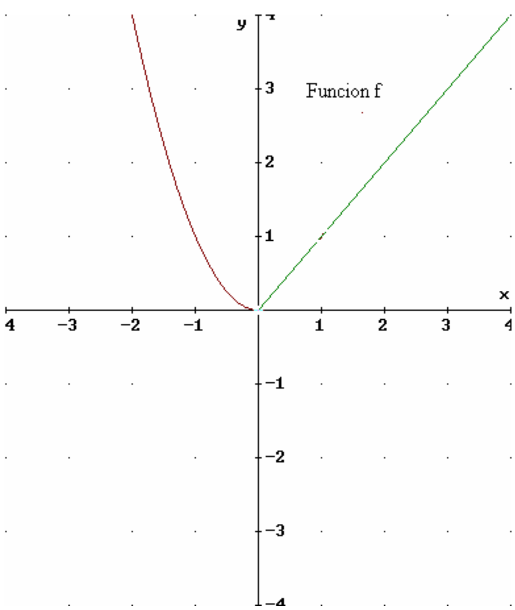
$$\mathbf{f}_-'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathrm{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{h})^2-\mathbf{x}^2}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}\mathbf{h}+\mathbf{h}^2-\mathbf{x}^2}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} \frac{\mathbf{h}(2\mathbf{x}+\mathbf{h})}{\mathbf{h}}$$

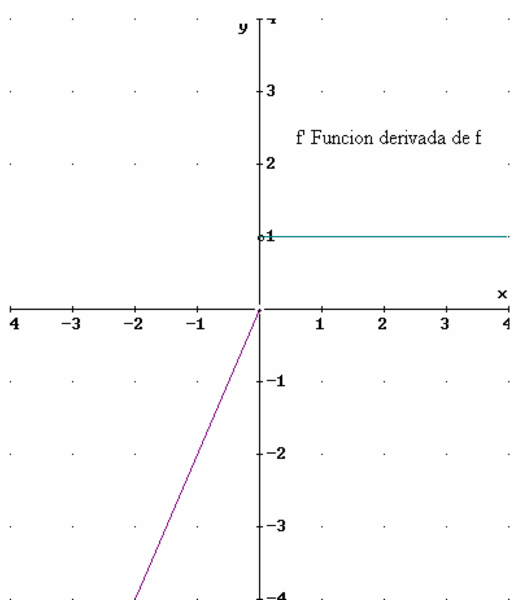
$$= \lim_{\mathbf{h}\to 0^-} (2\mathbf{x}+\mathbf{h}) = 2\mathbf{x}$$

$$\therefore \mathbf{f}_-'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$$

De esta manera podemos definir la “función derivada” de f de la siguiente manera:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \langle 0 \\ 1 & x \rangle 0 \end{cases}$$



4. Decidir si la función $f(x) = x^{1/3}$ es o no derivable en x = 0

Solución:

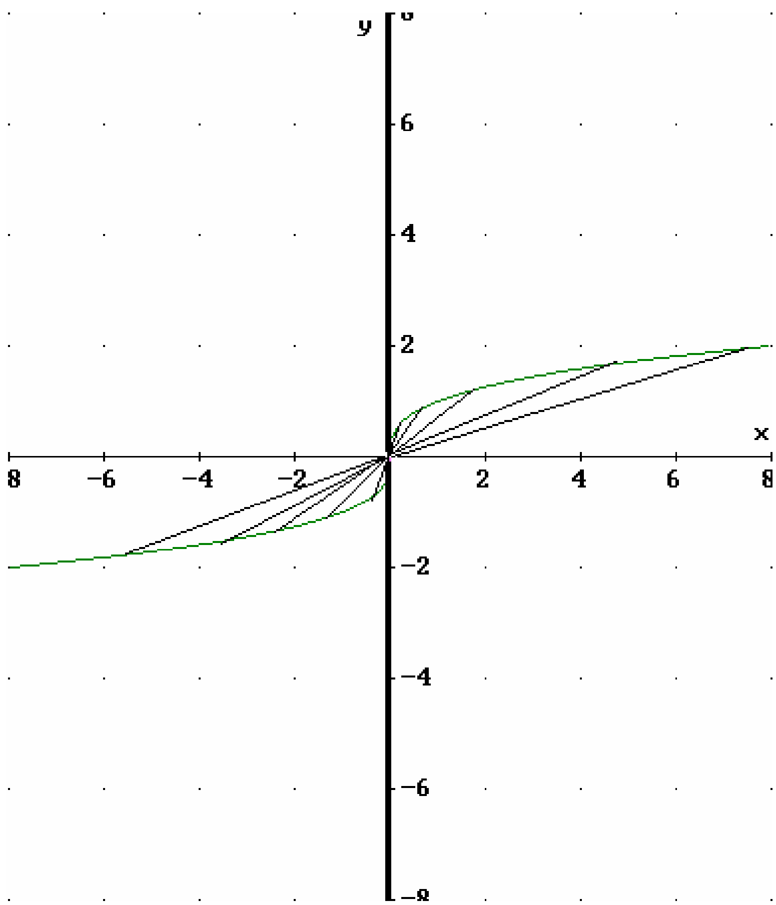
$$f_+'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

$$\therefore f_+'(0) = \infty$$

$$f_-'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

$$\therefore f_-'(0) = \infty$$

Por lo tanto $f$ no es derivable en $x = 0$




Cuando el límite es infinito por ambos lados (o menos infinito por ambos lados) la tangente atraviesa la curva; y el punto se llama ***"punto de inflexión"***. Las dos semirrectas tangentes son opuestas. Geométricamente significa que f tiene una tangente que es paralela al eje vertical.

En algunos textos de Análisis Matemático, se dice que la función dada tiene derivada infinita en x = 0.

Nosotros consideraremos que una función es derivable cuando el límite del cociente incremental es **"finito"**. Considerado desde ese punto de vista, la función $f(x) = x^{1/3}$ es:

a) Continua en x = 0
b) No es derivable en x = 0
c) Tiene recta tangente vertical en x = 0.

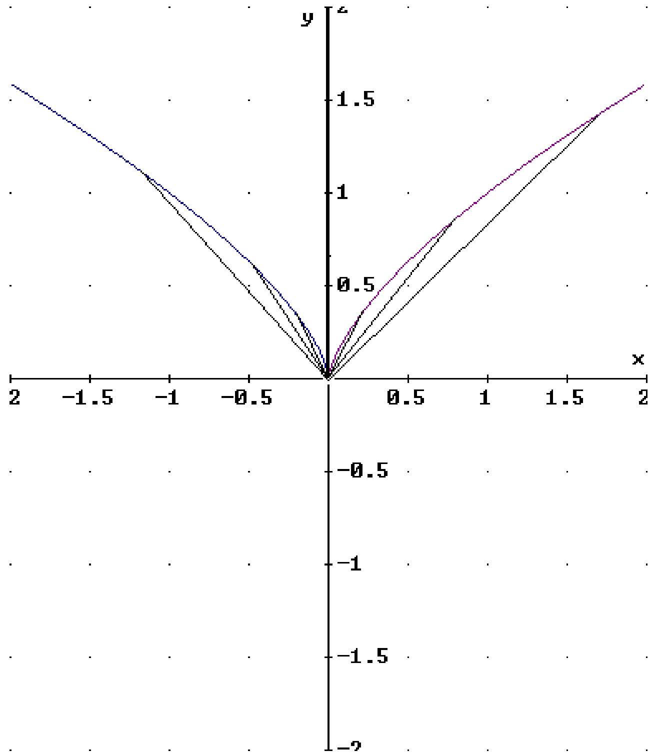
Y la ecuación de dicha tangente es precisamente x =0

5. Decidir si la función $f(x) = x^{2/3}$ es o no derivable en x = 0

Para ello calculemos el límite del cociente incremental y analicemos los resultados.

$$\mathbf{f}'(0)=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{(0+\mathbf{h})^{1/3}-0}{\mathbf{h}}=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{h}^{2/3}}{\mathbf{h}}=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{1}{\mathbf{h}^{1/3}}$$

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{h}}}=\infty \qquad\qquad \lim_{\mathbf{h}\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{h}}}=-\infty$$




Cuando el límite es infinito positivo por un lado y menos infinito por el otro; no existe recta tangente a la curva, de acuerdo a la definición dada anteriormente.
Geométricamente significa que las dos semirrectas coinciden. El punto se llama ***"punto de cuspidal o de retroceso"***.
En este caso, la función $f(x) = x^{2/3}$ es:

a) Continua en x = 0

b) No es derivable en x = 0

c) No existe recta tangente en el punto x = 0

## Continuidad y Derivabilidad

**Teorema**
Si una función f es derivable en el punto $x = x_0$, entonces f es continua en $x = x_0$

*Demostración:*

Por hipótesis $f'(x_0)$ existe y por lo tanto, de acuerdo a la definición:

$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{f(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}$ Esto dice que $f(x_0)$ existe, de lo contrario el límite anterior carecería de sentido. Por otra parte, también nos dice que se cumple la primera condición de continuidad para la función f.

Para que se cumpla las otras condiciones, alcanza con probar que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=0$. Por ese motivo consideremos:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}.(x - x_0)$ Esta igualdad se cumple ya que multiplicamos y dividimos por $(x - x_0)$ .

Aplicando la propiedad de límite de producto de dos funciones, tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0).0 = 0$$

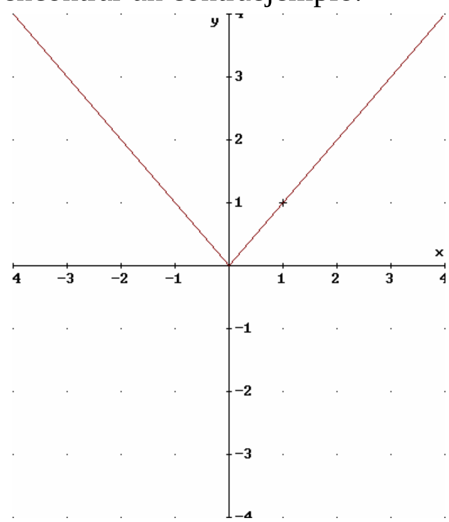
$$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

lo cual dice que f es continua en $x = x_0$.

La recíproca del teorema enunciado no es válida. Su recíproca es:

**" Si una función f es continua en $x = x_0$ , entonces f es derivable en $x = x_0$"**

Para demostrar la falsedad de la implicación basta con encontrar un contraejemplo.
Consideremos la función $f(x) = |x|$ .




Veamos si dicha función es continua en x = 0

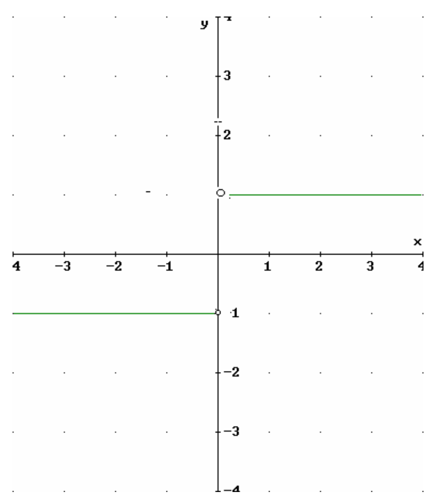
i) $f(0) = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} |x| = f(0)$

Lo cual nos asegura que la función módulo de x es continua en x = 0

Veamos ahora si la función es derivable en x = 0. Para ello debemos aplicar la definición de límite de cociente incremental en el punto x = 0.




$$\lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en x = 0.
La derivada de la función módulo es la función signo de x.

La importancia del Teorema reside en el hecho de que podemos utilizar la contra recíproca del mismo para decidir si una función es o no derivable en un punto. Pues si una función no es continua en un punto, la función no será derivable en el mismo punto.

Esto es: f derivable en $x = x_0 \Rightarrow$ f es continua en $x = x_0$. Lo cual es equivalente a probar (por la contra recíproca) que: f no es continua en $x = x_0 \Rightarrow$ f no es derivable en $x = x_0$. Esto es muy práctico, ya que algunas veces necesitamos saber si una función es o no derivable y si ya encontramos que "no es continua", seguro que "no es derivable".

Si negamos el antecedente de la implicación, esto es: f no es derivable en $x = x_0$ no podemos asegurar nada acerca de la continuidad de f en el punto. Esto se debe a que cuando el antecedente de una implicación es falso, el consecuente puede ser verdadero o falso y la implicación sigue siendo verdadera. Esto nos lleva a decir solamente que en estos casos "no podemos aplicar el teorema".

# Álgebra de derivadas

**1.- Derivada de una constante**

Cualquiera sea x real, si f(x) = k , con k un número real cualquiera, entonces f'(x) = 0

Demostración:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

**2.- Derivada de la variable independiente**

Cualquiera sea x real, si f(x) = x, entonces f'(x) = 1

Demostración:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

**3.- Derivada de la suma de dos funciones**

Sean f y g dos funciones derivables en x; entonces la función "suma" F(x) = f(x) + g(x) es también derivable en x y su derivada se calcula como la suma de las derivadas.
Demostración:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}=f'(x)+g'(x)$$

**Asi si :** $F(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow F'(x)=f'(x)+g'(x)$

**4.- Derivada del producto de una constante por una función**

Sea k es un número real cualquiera y f una función derivable en x. Si F(x) = k. f(x), entonces F'(x) = k .f'(x).

Demostración:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k.f(x+h)-k.(f(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k.(f(x+h)-f(x))}{h}=$$

$$k.\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}=k.f'(x)$$

**5.- Derivada del producto de dos funciones**

Sean f y g derivables en x. Entonces la función producto F(x) = f(x).g(x) es derivable en x y su derivada se calcula como F'(x) = f'(x). g(x) + f(x).g'(x)

Demostración:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-(f(x).g(x))}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x+h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}g(x+h).\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}f(x).\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}=g(x).f'(x)+f(x).g'(x)$$

$$\therefore F'(x)=g(x).f'(x)+f(x).g'(x)$$

**6.- Derivada del cociente de dos funciones**

Sean f y g derivables en x con g(x) ≠ 0. Entonces $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en x, y su derivada se calcula como $F'(x)=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

Demostración:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x+h)+f(x).g(x)-f(x).g(x)}{h.\left[g(x+h).g(x)\right]}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[f(x+h)-f(x)\right]-f(x)\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h.\left[g(x+h).g(x)\right]}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x).\dfrac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}-f(x).\dfrac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}}{g(x+h).g(x)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0}g(x).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}-\lim\limits_{h\to 0}f(x).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h).\lim\limits_{h\to 0}g(x)}=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\therefore F'(x)=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplos:

Sean las funciones f(x) = (2x + 1) y g(x) = (3x - 3)
Calculemos las derivadas de la función suma, producto y cociente de ambas.

(f(x) + g(x))’ = 2 + 3 = 5 . Por lo tanto la derivada de la función suma es la función constante 5.

(f(x) . g(x))’= 2.(3x-3) + (2x + 1).3 = 6x – 6 + 6x + 3 = 12x – 3 . Por lo tanto la derivada de la función producto es la función 12x –3

(f(x)/g(x))’ = [2.(3x –3) – (2x + 1).3]/$(3x – 3)^2$ = (6x – 6 –6x –3)/ $(3x – 3)^2$= -9/$(3x – 3)^2$

## Derivada de funciones elementales

Calculemos la derivada de algunas funciones elementales:

### *1.- Función Logaritmo Neperiano de x*

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

Demostración:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f(x+h)-f(x)}}{\mathbf{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\mathbf{x+h})-\ln(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{(\mathbf{x+h})}{\mathbf{x}}}{\mathbf{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\mathbf{h}}.\ln\frac{(\mathbf{x+h})}{\mathbf{x}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\ln\left(\frac{\mathbf{x+h}}{\mathbf{x}}\right)^{\frac{1}{\mathbf{h}}}\right]=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{x}}\right)^{\frac{1}{\mathbf{h}}}\right]$$

Si llamamos $u=\frac{h}{x}$ entonces cuando $h\to 0$ será que $u\to 0$. Por otro lado $h=u.x$

entonces $\frac{1}{h}=\frac{1}{\mathbf{u.x}}$ . Entonces con ese cambio de variables quedaría :

$$\ln\left[\lim_{u\to 0}\left((1+\mathbf{u})^{\frac{1}{\mathbf{u}}}\right)^{\frac{1}{\mathbf{x}}}\right]=\ln\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{x}}}=\frac{1}{\mathbf{x}}.\ln\mathbf{e}=\frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$\therefore \mathbf{f'(x)}=\frac{1}{\mathbf{x}}$$

Como aplicación calculemos la derivada de la función $f(x) = \log_a(x)$

Solución:

Sabemos que $x = e^{\ln(x)}$ y $x = a^{\log_a(x)}$

Igualando las dos expresiones tenemos: $e^{\ln(x)} = a^{\log_a(x)}$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros:

$\ln(x).\ln e = \log_a(x).\ln a$ . Entonces:

$$\ln\mathbf{x}=\frac{\log_{\mathbf{a}}\mathbf{x}.\ln\mathbf{a}}{\ln\mathbf{e}}\quad\therefore\ \ln x=\log_{\mathbf{a}}\mathbf{x}.\ln\mathbf{a}\Rightarrow\log_{\mathbf{a}}\mathbf{x}=\frac{\ln\mathbf{x}}{\ln\mathbf{a}}$$

Hemos expresado la función $\mathbf{f(x)}=\log_{\mathbf{a}}\mathbf{x}=\frac{1}{\ln\mathbf{a}}.\ln\mathbf{x}$ como producto de una constante por una función que conocemos su derivada. Por lo tanto aplicando la regla de derivación de producto de una constante por una función, la derivada de la función f será:

$$\mathbf{f'(x)}=\frac{1}{\mathbf{x}}.\frac{1}{\ln\mathbf{a}}$$

A medida que continuemos con el desarrollo de este tema, encontraremos por definición la derivada de otras funciones elementales, quedando para el lector la demostración de otras.

# Derivada de funciones compuestas

## *Regla de la Cadena*

Sea y = f(u) donde u = g(x). Si g es derivable en x y f es derivable en u, entonces la función y = f(u) = f(g(x)) es derivable en x y su derivada se calcula como $y'_x = f'(u).\ g'(x)$

Demostración:

Por definición,

$$\mathbf{y_x}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}}{\mathbf{\Delta x}}$$

Multiplicando y dividiendo dentro del límite por la expresión $(\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)})$ que suponemos no nula, se tiene:

$$\mathbf{y_x}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}}{\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)}} . \frac{\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)}}{\mathbf{\Delta x}} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}}{\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)}} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)}}{\mathbf{\Delta x}}$$

Como u = g(x) entonces $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)} \Rightarrow \mathbf{g(x+\Delta x) = u + \Delta u}$

Además si $\Delta \mathbf{x} \to 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{u} \to 0$

Por lo tanto:

$$\mathbf{y_x}' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{f(u+\Delta u) - f(u)}}{\mathbf{\Delta u}} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{g(x+\Delta x) - g(x)}}{\mathbf{\Delta x}} = \mathbf{f'(u).g'(x)}$$

Asi $\mathbf{y_x' = f'(u).g'(x)}$

Ejemplos:

1.- Calcular la derivada de la función $f(x) = \ln (x^2 + 2)$

Llamamos: $f(u) = \ln u$ ; $u = x^2 + 2$

Entonces: $\mathbf{f'(u)} = \frac{1}{\mathbf{u}}$ ; $u' = 2x$

En consecuencia:

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{1}{\mathbf{x}^2 + 2}.2x$$

2.- Calcular la derivada de la función: $g(x) = (x^3 + 3x^2 + 1)^{1/2}$

$$g'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}.(\mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}.(3\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x}}{2\sqrt{\mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2 + 1}}$$

En general:

$$\mathbf{x} \overset{h}{\mapsto} \mathbf{v} \overset{g}{\mapsto} \mathbf{u} \overset{f}{\mapsto} \mathbf{y}$$

Será y = (f o g o h)(x) = f[g(h(x)]. Entonces: v = h(x) ; u = g(v) ; y = f(u)

y' = f'(u).g'(v).h'(x)

3.- Calcular la derivada de la función:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln\sqrt{\mathbf{x}^2+1}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2+1}}.\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}^2+1}}.2\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2+1}$$

## Derivada de funciones inversas

Si f es biyectiva con derivada finita en x entonces $f^{-1}$ tiene derivada finita en x y se la calcula como $\frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}$

Demostración:

Por ser f biyectiva, existe la función inversa de f que denominamos $f^{-1}$ tal que se cumple :
$(f o f^{-1})(x) = (f^{-1} o f)(x) = x$ (1)
Sea x tal que f'(x) $\neq 0$. Si y = f(x) $\Rightarrow$ x = g(y)
Entonces, $\forall$ x: $f^{-1}(f(x)) = x = g(y)$
Derivando, aplicando la regla de la cadena tenemos:
$[f^{-1}(f(x))]'. f'(x) = 1 \Rightarrow g'(y). f'(x) = 1$
Como $f'(x) \neq 0 \Rightarrow g'(y) = 1/ f'(x)$
O bien, $\mathbf{x}' = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}$

También podemos escribirlo como: $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}'}$

Ejemplo:

Calculemos la derivada de la función exponencial: $y = a^x$

Si $y = a^x$ entonces por definición $\log_a y = \log_a a$. Entonces $x = \log_a y$ .
Ahora: $\mathbf{x}' = \frac{1}{\mathbf{y}.\ln \mathbf{a}}$ Por lo tanto la derivada será : $y' = \frac{1}{\mathbf{x}'}$ $\therefore$ $\mathbf{y}' = \mathbf{a}^{\mathbf{x}}.\ln \mathbf{a}$

## *2.- Derivada de funciones trigonométricas*

**Derivada de la función seno**

Si y = sen (x) entonces y'= cos (x)

Demostración:
Apliquemos la definición:

$$\mathbf{y}'=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{sen}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{sen}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{2.\mathbf{sen}\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}}{2}\right).\cos\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{h}+\mathbf{x}}{2}\right)}{\mathbf{h}}=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{2.\mathbf{sen}\left(\frac{\mathbf{h}}{2}\right).\cos\left(\frac{2\mathbf{x}+\mathbf{h}}{2}\right)}{\mathbf{h}}=$$

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{2}{\mathbf{h}}\mathbf{sen}\left(\frac{\mathbf{h}}{2}\right).\cos\left(\frac{2\mathbf{x}+\mathbf{h}}{2}\right)=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{sen}\left(\frac{\mathbf{h}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{h}}{2}}.\cos\left(\frac{2\mathbf{x}+\mathbf{h}}{2}\right)=\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{sen}\left(\frac{\mathbf{h}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{h}}{2}}.\lim_{\mathbf{h}\to 0}\cos\left(\frac{2\mathbf{x}+\mathbf{h}}{2}\right)=1.\cos(\mathbf{x})$$

$\therefore \quad \mathbf{y}'=\cos(\mathbf{x})$

En el segundo paso, hemos aplicado la relación trigonométrica:

sen(x) – sen(y) = $2.\ \mathbf{sen}(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}).\cos(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2})$

**Derivada de la función coseno**

Si y = cos (x) entonces y'= - sen (x)

Demostración:

Considerando que el seno de cualquier ángulo es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, el coseno de cualquier ángulo es igual al seno de su complemento podemos escribir:

$$\cos(\mathbf{x})=\mathbf{sen}(\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}-\mathbf{x})$$

Aplicando la derivada de funciones compuestas resulta:

$$\mathbf{y}'=\cos\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}-\mathbf{x}\right).(-1)=-\cos\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}-\mathbf{x}\right)=-\mathbf{sen}(\mathbf{x})$$

$\therefore\ \mathbf{y}'=-\mathbf{sen}(\mathbf{x})$

**Derivada de la función tangente**

y = tg (x) entonces y' = $\sec^2(x)$

Para la demostración ocuparemos la regla del cociente, ya que la tangente de x la podemos escribir como el cociente entre el sen de x sobre el coseno de x.
Demostración:

$\mathbf{y} = \mathbf{tg}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{sen}(\mathbf{x})}{\cos(\mathbf{x})}$ por lo tanto aplicando la regla de derivada de cociente de dos funciones:

$$y' = \frac{\cos(x).\cos(x) + \mathrm{sen}(x).\mathrm{sen}(x)}{\cos^2 \mathbf{x}} = \frac{\cos^2 \mathbf{x} + \mathbf{sen}^2 \mathbf{x}}{\cos^2 \mathbf{x}} = \sec^2 \mathbf{x}$$

$\therefore \quad y' = \sec^2 \mathbf{x}$

**Derivada de otras funciones trigonométricas**

Sabiendo que:

$\cot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \dfrac{\cos(\mathbf{x})}{\mathbf{sen}(\mathbf{x})}$ ; $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ ; $\mathrm{cosec}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$

y aplicando la regla de derivada de cociente de dos funciones, se puede probar fácilmente que:

| **Función** | **Función derivada** |
|---|---|
| f(x) = cotg(x) | f'(x) = -cosec$^2$(x) |
| f(x) = sec (x) | f'(x) = sec(x).tg(x) |
| f(x) = cosec(x) | f'(x) = -cosec(x).cotg(x) |

**Más ejemplos!!**

1.- Dada la función: $\mathbf{y} = \mathbf{sen}\sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}$ encontrar su función derivada.

Solución:
Como la función es compuesta, debemos aplicar la regla de la cadena. Así nos quedaría:

$$\mathbf{y}' = \cos\sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}.\frac{1}{2.\sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}}.2x = \frac{x.\cos\sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}}$$

2.- Dada la función:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} x.\mathrm{sen}\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i) Calcular la función derivada
ii) Decidir si la función derivada es continua en x = 0

Solución:

i) Para calcular la función derivada, primero debemos averiguar si la función es o no derivable en el punto x = 0. Para ello aplicamos la definición .

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{h}.\mathbf{sen}\,\pi/\mathbf{h} - 0}{\mathbf{h}} = \lim_{h\to 0}\mathbf{sen}\,\pi/\mathbf{h}$$ y sabemos que este límite no existe.

$\therefore f'(0)$ no existe.

Ahora bien, para los otros puntos $x \neq 0$, calculamos la derivada aplicando las reglas de derivación conocidas. De esta manera nos queda:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 1.\mathbf{sen}(\pi/\mathbf{x}) + \mathbf{x}.\cos(\pi/\mathbf{x})(-\pi/\mathbf{x}^2) = \mathbf{sen}(\pi/\mathbf{x}) - \pi/\mathbf{x}.\cos(\pi/\mathbf{x})$$

De este modo la función derivada quedaría:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{sen}(\pi/\mathbf{x}) - \pi/\mathbf{x}.\cos(\pi/\mathbf{x}) & x \neq 0 \\ \text{No existe} & x = 0 \end{cases}$$

Sabemos que f es continua en x = 0, pues:

a) f(0) = 0

b) $\lim_{x\to 0}\mathbf{x}.\mathbf{sen}\,\pi/\mathbf{x} = 0$

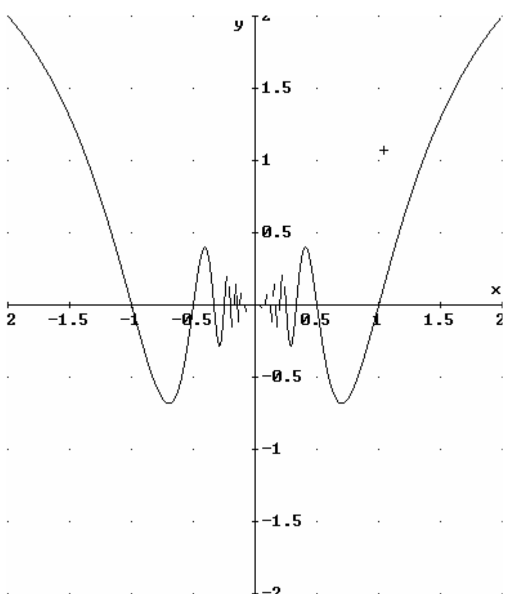
c) $\lim_{x\to 0}\mathbf{x}.\mathbf{sen}\,\pi/\mathbf{x} = \mathbf{f}(0)$

Sin embargo, demostramos que la función NO ES DERIVABLE en x = 0.

Veamos ahora si la función derivada es o no continua en x = 0

a) f’(0) no existe. Por lo tanto, éste solo hecho nos garantiza que la función derivada NO ES CONTINUA en x = 0.

b) $\lim_{x\to 0}\mathbf{sen}(\pi/\mathbf{x}) - \pi/\mathbf{x}.\cos(\pi/\mathbf{x})$ no existe




Por lo tanto podemos decir que la función f’ no es continua en x = 0 y además presenta una discontinuidad esencial de segunda especie.

La figura muestra el gráfico de la función f.

3.- Dada la función:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} x^2 . \text{sen} \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

iii) Calcular la función derivada
iv) Decidir si la función derivada es continua en x = 0

Solución:

f es continua en x = 0, ya que:

a) f(0) = 0
b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} \mathbf{x}^2 . \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{x} = 0$
c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} \mathbf{x} . \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{x} = \mathbf{f}(0)$

Veamos ahora cual es la función derivada de f. Para ello, primero analicemos si f es derivable en x = 0

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{h}^2 . \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{h} - 0}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \mathbf{h} . \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{h} = 0.$$

$\therefore f'(0) = 0$

Ahora bien, para los otros puntos x ≠ 0, calculamos la derivada aplicando las reglas de derivación conocidas. De esta manera nos queda:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.\mathbf{sen}(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}) + \mathbf{x}^2 . \cos(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x})(-\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}^2) = 2\mathbf{x}.\mathbf{sen}(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}. \cos(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x})$$

De este modo la función derivada quedaría:

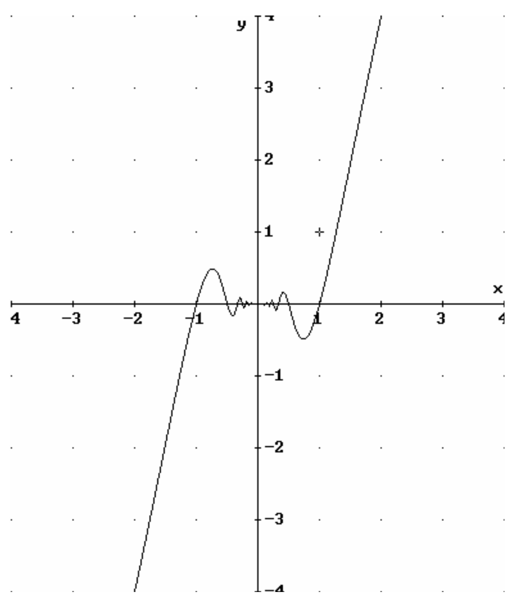
$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2\mathbf{x}.\mathbf{sen}(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}. \cos(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Nos queda por ver si la función derivada es o no continua en x = 0

a) f ’(0) = 0
b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} 2\mathbf{x}.\mathbf{sen}(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}. \cos(\boldsymbol{\pi}/\mathbf{x})$ no existe

Por lo tanto f ’ no es una función continua en el punto x = 0 . Y presenta una discontinuidad esencial de segunda especie en el origen.

La figura muestra el gráfico de la función f.



## *3.- Derivada de funciones hiperbólicas*

**Funciones Hiperbólicas**

Llamaremos coseno hiperbólico y seno hiperbólico de x, a las funciones definidas por:

$$\mathbf{Ch(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} + e^{-x}}}{2} \quad ; \quad \mathrm{Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} - e^{-x}}}{2}$$

Para realizar un estudio de las mismas, veamos si las funciones dadas son pares o impares.

$$\mathbf{Ch(-x)} = \frac{\mathbf{e^{-x} + e^{x}}}{2} = \mathbf{Ch(x)}$$

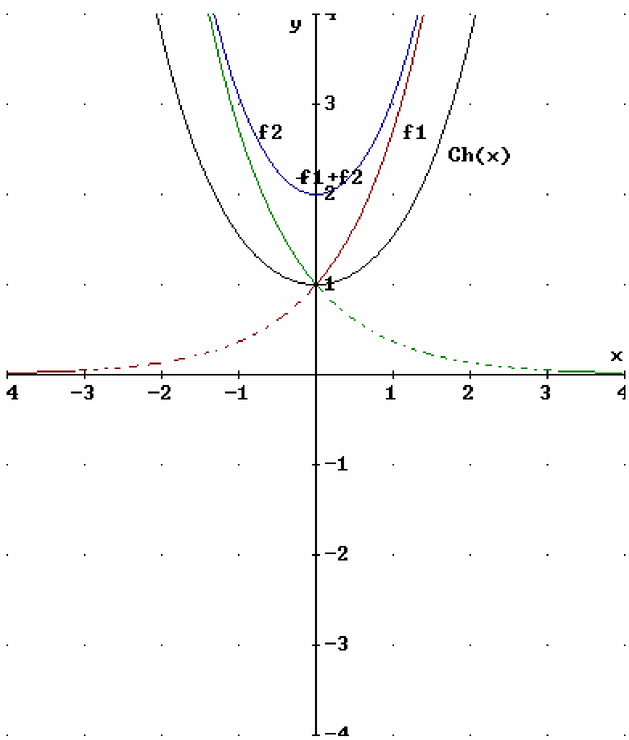
$$\mathrm{Sh(-x)} = \frac{\mathbf{e^{-x} - e^{x}}}{2} = -\,\mathrm{Sh(x)}$$

Esto nos dice que la función Ch(x) es una función par y el Sh(x) es una función impar. Por lo tanto la función coseno hiperbólico de x es una función que es simétrica con respecto al eje de las ordenadas y el seno hiperbólico de x es una función simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Además, Ch (0) = 1 y Sh (0) = 0

Para construir la gráfica de Ch (x) y Sh(x) se construyen las gráficas de $e^{x}$ y $e^{-x}$, simétricas entre sí. Basta tomar respectivamente la semisuma y la semidiferencia de sus ordenadas.

Para entender mejor esto, grafiquemos Ch (x) como la semisuma de las funciones $e^{x}$ y $e^{-x}$.




Donde se ha nombrado:
**f1** = $e^{x}$
**f2** = $e^{-x}$
f1 + f2 = $e^{x} + e^{-x}$
Ch(x) = (f1 + f2)/2

La gráfica del Coseno Hiperbólico de x es una curva llamada "Catenaria"; pues es de la forma que toma un cable suspendido por sus extremos bajo la acción de la gravedad.

Aunque la gráfica se parezca a una parábola, NO debe confundirse como tal, ya que las coordenadas de dicha función no corresponden a una función polinómica de grado dos.

Como :

$$\mathbf{Ch(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} + e^{-x}}}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} - e^{-x}}}{2}$$

$$\mathbf{Ch(x) - Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} + e^{-x} - e^{-x} + e^{x}}}{2} = \frac{2\mathbf{e^{-x}}}{2} = \mathbf{e^{-x}}$$

$$\mathbf{Ch(x) + Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^{x} + e^{-x} + e^{x} - e^{-x}}}{2} = \frac{2\mathbf{e^{x}}}{2} = \mathbf{e^{x}} \therefore \quad \mathbf{e^{x}} = \mathbf{Ch(x) + Sh(x)}$$

Hemos encontrado otro modo de definir la función exponencial $\mathbf{e^{x}}$ en términos de las funciones hiperbólicas.

También:

$$\mathbf{e^{-x}} = \mathbf{Ch(x) - Sh(x)}$$

Esto explica el comportamiento mutuo de las gráficas de Sh(x), Ch(x)

Si multiplicamos ambas igualdades, obtenemos:

$$\mathbf{e^{-x}.e^{x}} = \mathbf{(Ch(x) - Sh(x)).(Ch(x) + Sh(x)}$$

$$\mathbf{e^{x-x}} = \mathbf{Ch^{2}(x) - Sh^{2}(x)} \therefore \mathbf{Ch^{2}(x) - Sh^{2}(x)} = 1$$

De aquí se obtiene la expresión de cada función en términos de la otra.

$$\mathbf{Ch(x)} = \sqrt{1 - \mathbf{Sh^{2}(x)}}$$

$$\mathbf{Sh(x)} = \sqrt{1 - \mathbf{Ch^{2}(x)}}$$

También podemos definir las otras funciones hiperbólicas de la siguiente manera:

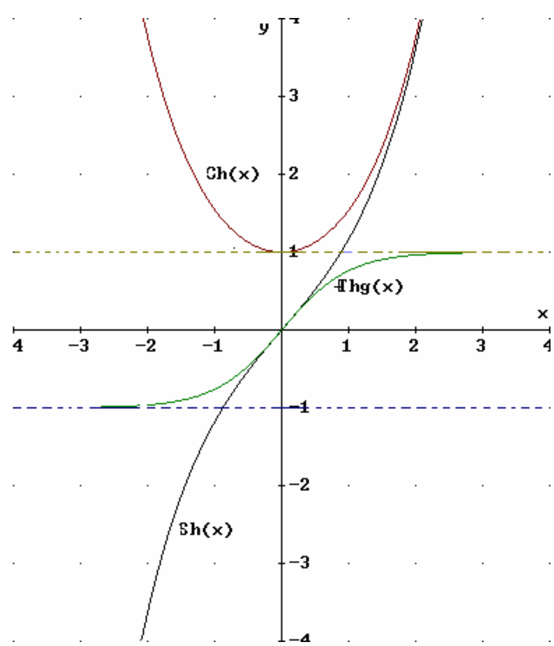
$$\mathbf{Thg(x)} = \frac{\mathbf{Sh(x)}}{\mathbf{Ch(x)}} = \frac{\mathbf{e^{x} - e^{-x}}}{\mathbf{e^{x} + e^{-x}}}$$

$$\mathbf{Chtg(x)} = \frac{1}{\mathbf{Thg(x)}} = \frac{\mathbf{e^{x} + e^{-x}}}{\mathbf{e^{x} - e^{-x}}}$$

$$\mathbf{Co}\,\mathrm{sec}\,\mathbf{h(x)} = \frac{1}{\mathbf{Sh(x)}} = \frac{2}{\mathbf{e^{x} - e^{-x}}}$$

$$\mathbf{Sech(x)} = \frac{1}{\mathbf{Ch(x)}} = \frac{2}{\mathbf{e^{x} + e^{-x}}}$$

Las gráficas de las funciones hiperbólicas Sh(x), Ch(x) y Thg(x) se muestran en la siguiente figura:



Las funciones hiperbólicas representan, la absisa y la ordenada de un punto de una hipérbola equilátera, y podrían definirse geométricamente a partir de esta curva, en forma muy semejante a las funciones circulares. De allí sus nombres.

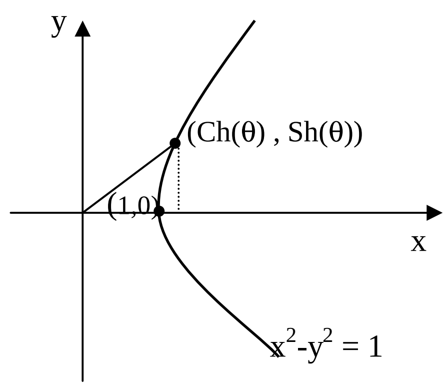
Esto es, las ecuaciones paramétricas:

$x = Ch(t)$

$y = Sh(t)$

Representan una hipérbola equilátera. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = Ch^2(t) \\ \\ y^2 = Sh^2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = Ch^2(t) - Sh^2(t) = 1 \quad ; \text{Por lo tanto: } x^2 - y^2 = 1$$




Relación del Seno y el Coseno hiperbólicos con la hipérbola $x^2-y^2 = 1$

**Derivadas de las funciones hiperbólicas**

Las fórmulas para las derivadas de las funciones hiperbólicas se asemejan a las fórmulas para las funciones trigonométricas, con algunas diferencias de signos.

$$\mathbf{y = Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Ch(x)}$$

$$\mathbf{y = Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh(x)}$$

$$\mathbf{y = Thg(x) = \frac{Sh(x)}{Ch(x)} \Rightarrow y' = \frac{Ch(x).Ch(x) - Sh(x).Sh(x)}{Ch^2(x)} = Sech^2(x)}$$

$$\mathbf{Chtg(x) = \frac{1}{Thg(x)} \Rightarrow y' = -Cosech^2(x)}$$

$$\mathbf{Cosech(x) = \frac{1}{Sh(x)} \Rightarrow y' = -Cosech(x).Chtg(x)}$$

$$\mathbf{Sech(x) = \frac{1}{Ch(x)} \Rightarrow y' = -Sech(x).Thg(x)}$$

## *4.- Derivadas de funciones trigonométricas inversas*

**Derivada del Arco Seno**

$$\mathbf{y} = \mathbf{arcsen}(\mathbf{x}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{sen}(\mathbf{y})$$

Por la regla de derivación de funciones inversas; $\mathbf{y}' = \dfrac{1}{\mathbf{x}'}$ . Así:

$$\mathbf{x}' = \cos(\mathbf{y}) = \sqrt{1-\mathbf{sen}^2(\mathbf{y})} = \sqrt{1-\mathbf{x}^2}$$

$$\therefore \mathbf{y}' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$$

**Derivada del Arco Coseno**

$$\mathbf{y} = \arccos(\mathbf{x}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} = \cos(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{sen}(\mathbf{y}) = -\sqrt{1-\cos^2 \mathbf{y}} = -\sqrt{1-\mathbf{x}^2}$$

$$\therefore \mathbf{y}' = \frac{-1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$$

En forma análoga se pueden encontrar las derivadas de las otras funciones trigonómetricas inversas.

## *5.- Derivada de funciones hiperbólicas inversas*

**Derivada del Argumento del Seno Hiperbólico**

$$\mathbf{y} = \mathbf{ArgSh}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Sh}(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{\mathbf{x}'} = \frac{1}{\mathbf{Ch}(\mathbf{y})} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{Sh}^2(\mathbf{y})}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{x}^2}}$$

$$\therefore \mathbf{y}' = \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{x}^2}}$$

**Derivada del Argumento del Coseno Hiperbólico**

$$\mathbf{y} = \mathbf{ArgCh}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Ch}(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{\mathbf{x}'} = \frac{1}{\mathbf{Sh}(\mathbf{y})} = \frac{1}{\sqrt{-1+\mathbf{Ch}^2(\mathbf{y})}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2-1}}$$

$$\therefore \mathbf{y}' = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2-1}}$$

## *6.- Derivada Logarítmica*

Vimos que, si:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{n}.[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{\mathbf{n}-1}.\mathbf{f}'(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})}.\ln \mathbf{a}.\mathbf{f}'(\mathbf{x})$$

Por la regla de funciones compuestas.
Veamos que ocurre cuando las función a derivar es de la forma: $\mathbf{y} = [\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$

Por definición es imposible obtenerla. Procederemos entonces en forma distinta. Tomaremos logaritmo natural en ambos miembros. Así:

$$\ln \mathbf{y} = \ln[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\therefore \ln \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Derivando como producto de dos funciones y por la regla de la cadena ya que y = f(x)

$$\frac{1}{\mathbf{y}}.\mathbf{y}' = \mathbf{g}'(\mathbf{x}).\ln \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}).\frac{1}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}.\mathbf{f}'(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x}).\ln \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}.\mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]$$

$$\therefore \mathbf{y}' = [\mathbf{f}(\mathbf{x})^{\mathbf{g}(\mathbf{x})}]\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x}).\ln \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}.\mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]$$

El método empleado en estos párrafos se llama “derivación logarítmica”

**Ejemplos**

**1.- Calcular la derivada de la función:**

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \qquad \text{con} \quad n\, \boldsymbol{\varepsilon}\, Q$$

$$\ln y = n.\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}.\mathbf{y}' = \mathbf{n}.\frac{1}{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}.\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{x}} \qquad \therefore \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{n}.\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{x}} = \mathbf{n}.\mathbf{x}^{\mathbf{n}-1}$$

$$\therefore \mathbf{y}' = \mathbf{n}.\mathbf{x}^{\mathbf{n}-1}$$

**2.- Calcular la derivada de la función:**

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{sen}(\mathbf{x}))^{\sqrt{\mathbf{x}}}$$

$$\mathbf{ln}\, \mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}}.\mathbf{ln}(\mathbf{sen}(\mathbf{x}))$$

$$\frac{1}{\mathbf{y}}.\mathbf{y}' = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}}.\mathbf{ln}(\mathbf{sen}(\mathbf{x})) + \sqrt{\mathbf{x}}.\frac{1}{\mathbf{sen}(\mathbf{x})}.\mathbf{cos}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y}' = [\mathbf{sen}(\mathbf{x})]^{\sqrt{\mathbf{x}}}.\left[\frac{\mathbf{ln}(\mathbf{sen}(\mathbf{x}))}{2.\sqrt{\mathbf{x}}} + \sqrt{\mathbf{x}}.\mathbf{cot}\,\mathbf{g}(\mathbf{x})\right]$$

## *7.- Derivada de funciones expresadas paramétricamente*

Una función dada paramétricamente está dada por:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{t})$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{t})$$

donde t es un parámetro y se cumple que las variables x e y son derivables en t. Entonces:

$$\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$
$$\mathbf{y}'(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}$$
$$\therefore\ \mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}}{\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}} = \frac{\mathbf{y}'(\mathbf{t})}{\mathbf{x}'(\mathbf{t})} \qquad \therefore \qquad \mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{y}'(\mathbf{t})}{\mathbf{x}'(\mathbf{t})}$$

Ejemplo:

Dadas las ecuaciones paramétricas de la elipse, encontrar su derivada.

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}.\cos(\mathbf{t})$$
$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}.\mathbf{sen}(\mathbf{t})$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x'(t) = -a.sen(t)} \\ \\ \mathbf{y'(t) = b.cos(t)}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{-b.cos(t)}}{\mathbf{a.sen(t)}} = \frac{\mathbf{-b}}{\mathbf{a}}\mathbf{.cot\,g(t)}$$

Si queremos expresar la derivada en función de la variable x, debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} = \cos(\mathbf{t}) \\ \\ \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{sen}(\mathbf{t})\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} = \cos^2(\mathbf{t}) \\ \\ \dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{sen}(\mathbf{t})\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \cos^2(\mathbf{t}) + \mathbf{sen}^2(\mathbf{t}) = 1 \Rightarrow \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = 1$$

La última expresión es la expresión de una elipse en coordenadas cartesianas.
Despejando y = y(x), será:

$$\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = 1 - \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^2 = \mathbf{b}^2\left(1 - \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2)}$$

Aplicando a un caso particular, se decide cual de los signos ha de tomarse. En este caso se considerará el signo positivo.
Con esta expresión dada anteriormente y trabajando algebraicamente **y’** obtenemos:

$$\mathbf{y}'=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}.\frac{\cos(\mathbf{t})}{\mathbf{sen}(\mathbf{t})}=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}}\frac{\cos(\mathbf{t})}{\mathbf{sen}(\mathbf{t})}=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{a}.\cos(\mathbf{t}).\mathbf{b}}{\mathbf{b}.\mathbf{sen}(\mathbf{t}).\mathbf{a}}=-\frac{\mathbf{b}.\mathbf{x}.\mathbf{b}}{\mathbf{a}.\mathbf{y}.\mathbf{a}}=-\frac{\mathbf{b}^2.\mathbf{x}}{\mathbf{a}^2\mathbf{y}}$$

$$\therefore \mathbf{y}'=-\frac{\mathbf{b}^2.\mathbf{x}}{\mathbf{a}^2\sqrt{\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}(\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2)}}=-\frac{\mathbf{b}^2.\mathbf{x}}{\mathbf{a}^2\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\sqrt{(\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2)}}=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{.\mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2)}}$$

$$\therefore \mathbf{y}'=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{.\mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2)}}$$

## *8.-Derivada de Funciones Implícitas*

La mayoría de las funciones que hemos encontrado están descritas por la fórmula:
f ={(x,y ) : y = f(x)}
donde la ecuación y = f(x) representa una fórmula o regla que nos dice como computar el valor de la variable dependiente “y” directamente en términos de la variable independiente”x” . Una función tal se llama “explícita”.

Pero podemos también expresar la función como F(x,y) = 0. Si está representada de este modo, se dice que la función está dada en forma “implícita”.

Por ejemplo, la función:
$x^2 + x.y = 3 – y^2$ puede ponerse de la forma F(x,y) = 0
$x^2 + x.y - 3 + y^2 = 0$ y de este modo podemos despejar y = y(x)
$y^2+ x.y + ( x^2 – 3) = 0$ y tenemos una ecuación cuadrática en y. Resolviendo la misma:

$$\mathbf{y}=\frac{-\mathbf{x}\pm\sqrt{[\mathbf{x}^2-4(\mathbf{x}^2-3)]}}{2}=\frac{-\mathbf{x}\pm\sqrt{[\mathbf{x}^2-4\mathbf{x}^2+12)]}}{2}$$

$$\therefore \mathbf{y}=\frac{-\mathbf{x}\pm\sqrt{12-3\mathbf{x}^2}}{2}$$

Para que la expresión tenga sentido, debe cumplirse:
$12 - 3x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 12 \geq 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 4 \geq x^2 \quad \therefore |x| \leq 2$

Como hay dos valores para y, para cada x, tal que $|x| \leq 2$, el conjunto no es una función sino una relación. Si especificamos:

$f_1$={(x,y): y = $\frac{-\mathbf{x}+\sqrt{12-3\mathbf{x}^2}}{2}$ }

$f_2$={(x,y): y = $\frac{-\mathbf{x}-\sqrt{12-3\mathbf{x}^2}}{2}$ }

con Dominio, $D_{fi}$={x ε R/ $|x| \leq 2$}
Entonces cada una de las $f_i$ será una función.

Por ello, cuando tenemos F(x,y) = 0 generalmente implica una o más relaciones funcionales. Esto no siempre es cierto, pues la ecuación:
$x^2 + y^2 + 1 = 0$ no es cierta para ningún valore de x e y. Por lo tanto no existe ninguna función de variable real.

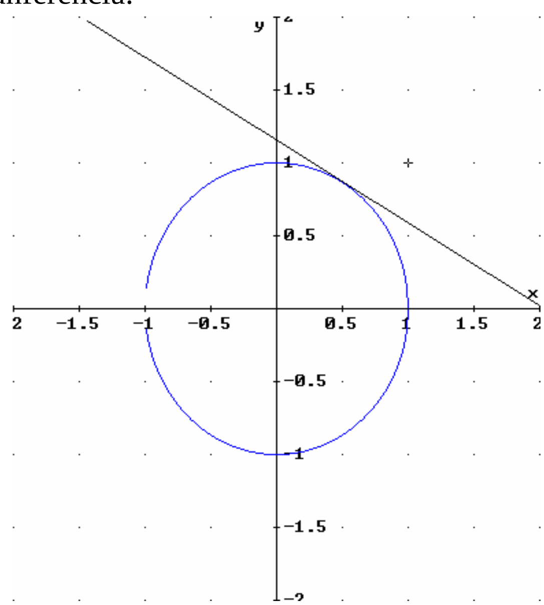
Bajo ciertas condiciones que generalmente se encuentran en las aplicaciones, una ecuación F(x,y) = 0 define una o más función derivables de las cuales una particular puede escogerse haciendo especificaciones adicionales.

Una función cuya existencia está implicada en una ecuación F(x,y) = 0 se llama "implícita".

A veces no se puede encontrar y = f(x), pero es muy interesante conocer su derivada, pues ella puede proporcionarnos datos importantes del comportamiento de una función en un entorno de un punto.

Por ese motivo, veamos como encontrar la derivada de funciones dadas en forma implícita. Esto lo haremos mediante dos ejemplos.

1.- Encontrar la derivada en un punto de la circunferencia:




$$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

Derivando respecto de x, teniendo en cuenta que y = y(x) y que debemos aplicar la regla de la cadena tenemos:

$$2\mathbf{x}+2\mathbf{y}.\mathbf{y}'=0 \quad\Rightarrow\quad 2\mathbf{y}.\mathbf{y}'=-2\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y}'=-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{y}'=-\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$$

La cual está definida para todos los valores de la variable x tales que -1 < x < 1

2.- Encontrar la derivada de la siguiente función:

$$\mathbf{x}^2+\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}^2-3=0$$

$$2\mathbf{x}+1.\mathbf{y}+\mathbf{x}.\mathbf{y}'+2\mathbf{y}.\mathbf{y}'=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y+(x+2y).\mathbf{y}'=0 \quad\Rightarrow\quad (x+2y).\mathbf{y}'=-(2\mathbf{x}+\mathbf{y})$$

$$\therefore \quad \mathbf{y}'=-\frac{(2\mathbf{x}+\mathbf{y})}{(\mathbf{x}+2\mathbf{y})}$$

## Derivadas Sucesivas

Sea f una función derivable en x. Entonces se cumple:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Donde hemos escrito a g(x) como la función derivada de f en x. Nos preguntamos: ¿g será o no derivable en x?. La respuesta es afirmativa si y solo si se cumple:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \text{ si dicho límite existe.}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))' = \mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

$$\therefore \mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \text{ si dicho límite existe.}$$

Así g’(x) es una función que es derivable en x que podemos llamar r(x). ¿será r derivable en x?. De nuevo la respuesta será afirmativa si y solo si se cumple:

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{g}'(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}''(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \mathbf{g}''(\mathbf{x}) \text{ si dicho límite existe.}$$

Podemos escribir entonces:

$$f'''(x) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}''(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

En general podemos decir que:

$$\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}^{\mathbf{n}-1}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}^{\mathbf{n}-1}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \text{ si dicho límite existe.}$$

que llamaremos derivada n-ésima de f con respecto a x.

**Ejemplos:**

Dadas las siguientes funciones, encontrar la derivada n-esima de las mismas.

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 1$

   $f'(x) = \mathbf{f}^{(1)}(x) = 4x^3 - 9\mathbf{x}^2 + 10\mathbf{x} - 2$

   $\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(2)}(x) = 12\mathbf{x}^2 - 18\mathbf{x} + 10$

   $\mathbf{f}'''(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(3)}(x) = 24\mathbf{x} - 18$

   $\mathbf{f}^{\mathbf{IV}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(4)}(x) = 24$

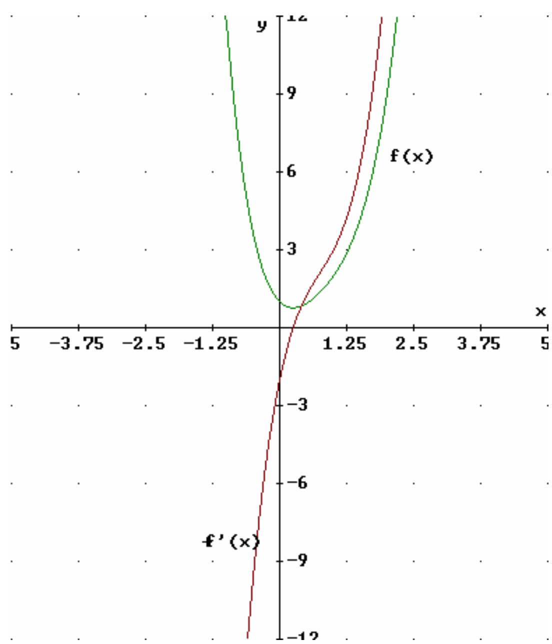
   $\mathbf{f}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(5)}(x) = 0$

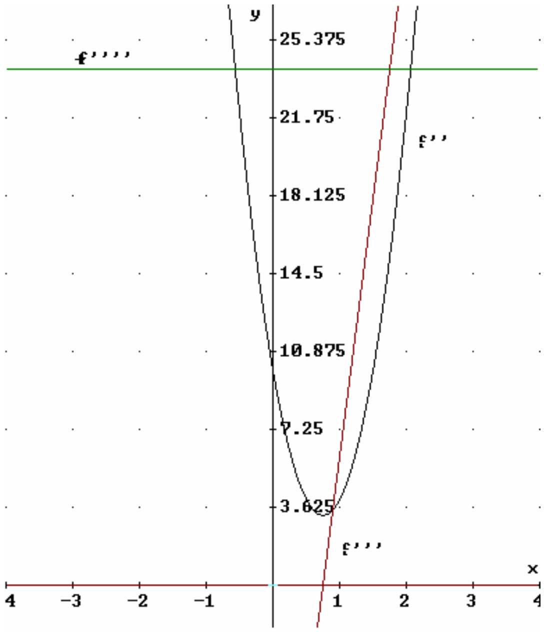
   $\mathbf{f}^{\mathbf{VI}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(6)}(x) = 0$

   $\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall n \geq 5$

que llamaremos derivada n-ésima de f.

El dibujo muestra la función f y su derivada primera.






El dibujo muestra las gráficas de las funciones derivadas de segundo, tercer, cuarto y quinto orden de la función

2. $\mathbf{f(x) = e^x}$

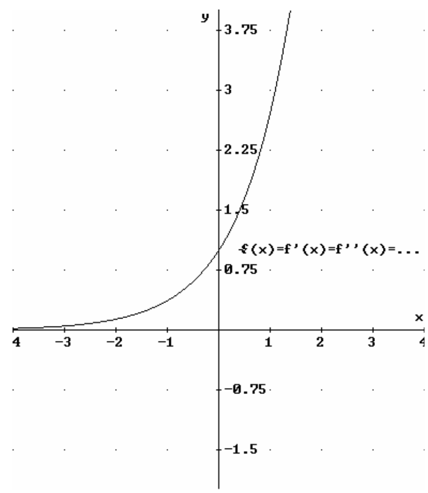
$\mathbf{f'(x) = f^{(1)}(x) = e^x}$

$\mathbf{f''(x) = f^{(2)}(x) = e^x}$

$\mathbf{f'''(x) = f^{(3)}(x) = e^x}$

$\mathbf{f^{(n)}(x) = e^x}$

El dibujo muestra la función f y sus respectivas derivadas, hasta la n –ésima. Todas iguales!!!.




3. $\mathbf{f(x) = sen(x)}$

$$\mathbf{f'(x) = f^{(1)}(x) = \cos(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})}$$

$$\mathbf{f''(x) = f^{(2)}(x) = -sen(x) = sen(x + \pi) = sen(x + \frac{2}{2}\pi)}$$

$$\mathbf{f'''(x) = f^{(3)}(x) = -\cos(x) = -sen(x + \frac{\pi}{2}) = sen(x + \frac{\pi}{2} + \pi) = sen(x + \frac{3}{2}\pi)}$$

$$\mathbf{f^{IV}(x) = f^{(4)}(x) = sen(x) = sen(x + 2\pi) = sen(x + \frac{4}{2}\pi)}$$

$$\mathbf{f^{(n)}(x) = sen(x + \frac{n}{2}\pi)}$$

Lo que hemos encontrado en estos tres ejemplos se llaman “formulas recursivas” para encontrar la derivada n-ésima de una función.

## *Derivada n-ésima del producto de dos funciones*

Sea $y = u.v$
Calculemos las derivadas:
$y' = u'.v + u\,.v'$

$y'' = u''.v + u'.v' + u'.v' + u.v'' = u''.v + 2.u'.v' + u.v'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2.u^{(1)}.v^{(1)} + v^{(2)}\,u^{(0)}$
$= (u + v)^{(2)}$

$y''' = u'''.v + u''.v' + 2(u''.v' + u'.v'') + u'.v'' + u.v'''$
$= u'''.v + u''.v' + 2.u''.v' + 2.u'.v'' + u'.v'' + u.v'''$
$= u'''.v + 3u''.v' + 3.u'.v'' + u.v''' = u^{(3)}\,v^{(0)} + 3.u^{(2)}.v^{(1)} + 3.\,u^{(1)}.v^{(2)} + u^{(0)}\,.v^{(3)}$
$= (u + v)^{(3)}$

Si escribimos las derivadas del siguiente modo:

$y^{(1)} = u^{(1)}v^{(0)} + v^{(1)}\,u^{(0)} = (u + v)^{(1)}$

$y^{(2)} = u^{(2)}v^{(0)} + 2.u^{(1)}.v^{(1)} + v^{(2)}\,u^{(0)}$

$y^{(3)} = u^{(3)}\,v^{(0)} + 3.u^{(2)}.v^{(1)} + 3.\,u^{(1)}.v^{(2)} + u^{(0)}\,.v^{(3)} = (u + v)^{(3)}$

Los exponentes entre paréntesis indican el orden de derivación y (0) indica la función sin derivar. Así vemos la analogía que existe con el desarrollo de un binomio elevado a la e-nesima potencia.

Por lo tanto: $\mathbf{y^{(n)} = (u + v)^{(n)}}$

Hemos expresado la fórmula recursiva para la derivada n – ésima del producto de dos funciones **u** y **v**.

Ejemplo:

Si $y = x^2.\ln(x)$, calcular la derivada de orden 3.

$u^{(0)} = x^2$ $\qquad v^{(0)} = \ln(x)$
$u^{(1)} = 2x$ $\qquad v^{(1)} = x^{-1}$
$u^{(2)} = 2$ $\qquad v^{(2)} = (-1).\,x^{-2}$
$u^{(3)} = 0$ $\qquad v^{(3)} = (-1).(-2).\,x^{-3} = 2.\,x^{-3}$

$y^{(3)} = 0.\ln(x) + 3.2.x^{-1} + 3.2.x(-x^{-2}) + 2.x^{-3}.x^2$
$y^{(3)} = 6.\,x^{-1} - 6.\,x^{-1} + 2.\,x^{-1} \Rightarrow \quad \mathbf{y^{(3)} = 2.\,x^{-1}}$

# Diferencial

Sea y = f(x) que admite derivada finita en un punto. Sabemos que:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{con} \lim_{\Delta \mathbf{x} \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 0$$

**Asi** :

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$$

Al primer término (parte principal del incremento si f’(x) no es nulo, se lo llama “diferencial de y”.

**Definición**

Diferencial en un punto x de una función derivable en ese punto, es el producto de su derivada por el incremento arbitrario de la variable. Esto es:

$$\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$$

Además considerando a x como función de x, tenemos:
x = g(x) entonces g’(x) = 1 y por definición

$$\mathbf{dx} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \qquad \therefore \mathbf{dx} = 1.\Delta\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{dx}$$

Así $\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{dx}$

Esta última igualdad se llama “expresión analítica del diferencial”. La expresión analítica del diferencial dy = y’($x_0$)dx, resulta coincidente “en pequeño” y alrededor del punto $x_0$, con la ecuación incremental de la tangente (considerada como recta que pasa por un punto) con solo sustituir incrementos por diferenciales; ya que la ecuación de la tangente tiene la forma: y – $y_0$ = y’($x_0$)(x - $x_0$).

Esto es:

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}_0{}'\Delta\mathbf{x} \qquad \text{Como} \quad \Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \quad \text{y} \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

Si sustituimos $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{dx}$ y $\Delta\mathbf{y} \cong \mathbf{dy}$ se tiene :

$$\mathbf{dy} = \mathbf{y}_0{}'\mathbf{dx}$$

Es fácil demostrar que $\Delta\mathbf{y}$ y dy son infinitésimos equivalentes, cuando $\Delta\mathbf{x} \to 0$ . Esto quiere decir que $\Delta\mathbf{y} \cong \mathbf{dy}$ , cuando $\Delta\mathbf{x} \to 0$ .

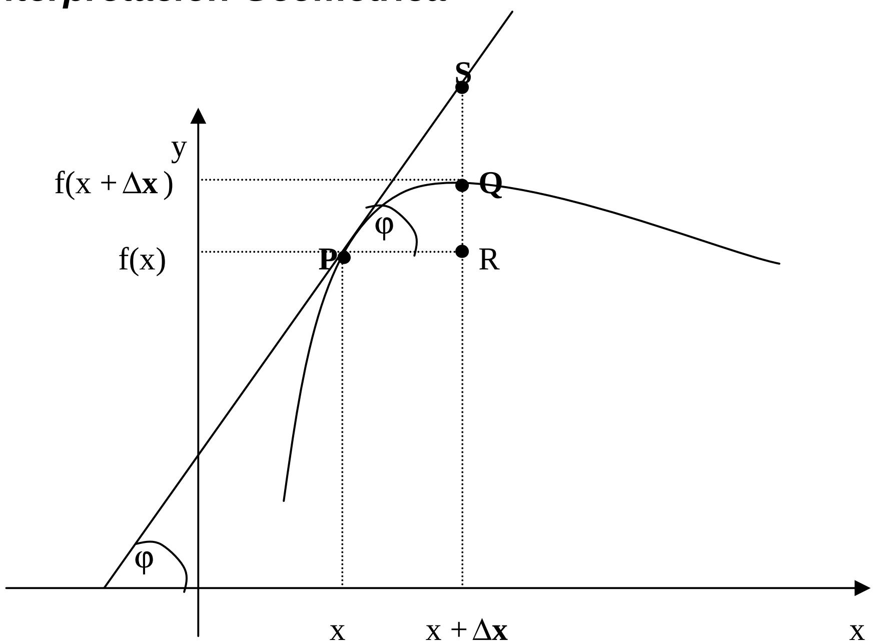
En efecto:

$$\frac{\mathbf{dy}}{\Delta\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}'\Delta\mathbf{x}}{\Delta\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}'}{\frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}}} \quad \text{tomando límite cuando } \Delta\mathbf{x} \to 0 \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathrm{dy}}{\Delta\mathbf{y}} = \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathrm{y}'}{\frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{y}'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{dy}}{\Delta\mathbf{y}} = 1 + \mu(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \mathbf{dy} = \Delta\mathbf{y} + \mu(\mathbf{x})\Delta\mathbf{y}$$

Esto dice que d**y** y $\Delta$**y** difieren en un infinitésimo.

## *Interpretación Geométrica*




$$\mathbf{y}' = \mathbf{tg}\varphi = \frac{\overline{\mathbf{SR}}}{\overline{\mathbf{PR}}} = \frac{\overline{\mathbf{SR}}}{\Delta\mathbf{x}} \Rightarrow \overline{\mathbf{SR}} = \mathbf{y}'\Delta\mathbf{x} = \mathbf{dy}$$

$$\therefore \mathbf{dy} > \Delta\mathbf{y}$$

Si la concavidad de la curva es hacia abajo, se puede ver que la desigualdad cambia de sentido. (Ejercicio para el lector).

Es decir: El diferencial de una función en un punto, es el “incremento de la ordenada de la tangente” en ese punto.

No debe confundirse $\Delta$**y** con d**y** que solamente son idénticos cuando la curva coincide con la tangente, o sea cuando la función es lineal.

Geométricamente, el diferencial es una aproximación lineal de la función en el punto. Esto significa que podemos ya tener un modo de aproximar la función en un punto. Luego veremos de que manera podemos conseguir una mejor aproximación.

También, en el caso de una variable la función es derivable en el punto cuando y solo cuando es diferenciable. Esto significa que si una función es derivable entonces existe la recta tangente en dicho punto ( o sea es diferenciable).

Por ello, cuando una función es derivable en un punto $x_0$; recta y curva se aproximan tanto como se quiera cuando $\Delta\mathbf{x} \to 0$. Además el incremento d**x** o $\Delta\mathbf{x}$ puede ser cualquiera, sea constante o variable, tienda o no a cero se verifica que:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$$

Esta igualdad no solo nos permite considerar al segundo miembro como cociente de diferenciales, sino como una notación de derivada que tiene la ventaja de poner en evidencia no solo la función que se deriva, sino también la variable respecto de la cual se deriva.

La expresión f'(x) tiene en cambio la ventaja de que permite expresar cómodamente los valores numéricos de la función derivada. Por ejemplo: f'(1) ; f'(2)..... etc.

Veamos un ejemplo:

Sea $y = x^3 - 6x$

a) Hallar $\Delta\mathbf{y}$ b) d**y** c) $\Delta\mathbf{y}$ -d**y**

a)

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})^3 - 6(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \mathbf{x}^3 + 6\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2\Delta\mathbf{x} + 3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^2 + \Delta\mathbf{x}^3 - 6\Delta\mathbf{x} = (3\mathbf{x}^2 - 6)\Delta\mathbf{x} + (3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^2 + \Delta\mathbf{x}^3)$$

b)

d**y** = $(3x^2 - 6)$d**x**

c)

$$\Delta\mathbf{y} - \mathbf{dy} = (3\mathbf{x}^2 - 6)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{(}3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^2 + \Delta\mathbf{x}^3\mathbf{)} - \mathbf{(}3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{)dx}$$

$$\textbf{Como}: \Delta\mathbf{x} = \mathbf{dx}$$

$$\Delta\mathbf{y} - \mathbf{dy} = 3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^2 + \Delta\mathbf{x}^3 = \mathbf{(}3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^2\mathbf{)}\Delta\mathbf{x}$$

$$\Delta\mathbf{y} - \mathbf{dy} = \varepsilon\mathbf{(x)}\Delta\mathbf{x}$$

$$\textbf{donde}: \varepsilon\mathbf{(x)} = \mathbf{(}3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^2\mathbf{)}$$

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \varepsilon\mathbf{(x)} = 0$$

**Así :**

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\Delta\mathbf{y} - \mathbf{dy}}{\Delta\mathbf{x}} = \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathbf{(}3\mathbf{x}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^2\mathbf{)}\Delta\mathbf{x}}{\Delta\mathbf{x}} = 0$$

Lo cual dice que ( $\Delta\mathbf{y}$ -d**y**) es un infinitésimo de orden superior a $\Delta\mathbf{x}$.

## *Reglas de Diferenciación*

Puesto que el diferencial solo difiere de la derivada en el factor dx arbitrario, todas las reglas de derivación son válidas para los diferenciales.

## *Diferencial de una función de función*

Si $y = f(u)$ siendo $u = g(x)$

Derivando tenemos:

$y' = (f(u))' = (f(g(x))' = f\,'(u).g'(x)$

Por lo tanto, el diferencial será:

$dy = y'dx = f'(u).g'(x).dx$

Ya que: $u = g(x)$ entonces $du = g'(x).dx$ entonces:

$\mathbf{dy = f'(u).du}$

Es decir, la expresión analítica del diferencial de $y = f(u)$, es la misma aunque u no sea la variable independiente. Esto muestra la invarianza de la expresión analítica del diferencial. Esta invarianza **no** se conserva en las diferenciales sucesivas.

Con la notación introducida anteriormente para la derivada como cociente de diferenciales, la regla de derivación de una función de función toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La invarianza de la expresión analítica facilita el cálculo de diferenciales, pues al aplicar las fórmulas de diferenciación no interesa si una variable es la independiente o una función cualquiera.

Por ejemplo:

$d(sen^2(x)) = 2.sen(x).cos(x).dx$

Esto es así, ya que consideramos: $u = sen^2(x)$ entonces $du = 2.sen(x).cos(x).dx$

Pero: $cos(x).dx = d(sen(x))$

Entonces: $d(sen^2(x)) = 2.sen(x).\ d(sen(x))$

## Aplicaciones

Consideremos una función f en un punto x = a y luego incrementemos en la variable x.

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Por otro lado: d**y** = f ’(a).d**x**
Para $\Delta \mathbf{x}$ pequeño, se cumple: $\mathbf{dy} \cong \Delta \mathbf{y}$
Así: $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cong \mathbf{f}'(\mathbf{a}).\mathbf{dx}$
Por lo tanto: $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{x}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a}).\mathbf{dx}$

Usando este hecho se puede usar el concepto de diferencial para realizar cálculos aproximados.

Ejemplos:
1.- Calcular $\sqrt{10}$
Primero distinguimos la función f. En nuestro caso será: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}}$
Sabemos que $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$
Por lo tanto: **a** = 9 y $\Delta \mathbf{x} = 1$
Como:

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{a} + \Delta \mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}}}\mathbf{dx}$$

Sabemos que d**y** **y** $\Delta$**y** son infinitésimos equivalentes, podemos escribir:

$$\sqrt{\mathbf{a} + \Delta \mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{a}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}}}\mathbf{dx}$$

Aplicando esto a los valores que tenemos, resulta:

$$\sqrt{10} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}1 = 3 + \frac{1}{2.3}1 = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} = 3{,}1666\ldots$$

$$\sqrt{10} = 3{,}1666\ldots.$$

Aquí tenemos una aproximación de $\sqrt{10}$

2.- Calcular cos 31º

Razonamos de manera análoga. Distinguimos primero cual es la función. En este caso es:
f(x) = cos (x)
Luego distinguimos quien es **a** y $\Delta$**x**

$$\mathbf{a} = 30º = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\pi}{180}$$

$\Delta x$ tiene que ser un número real. Por ello no podemos tomar $\Delta x = 1º$ y debemos convertirlo a un número real. Esto es muy sencillo aplicando simplemente la regla de tres simples.

Entonces:

$$\mathbf{dy} = -\mathbf{sen(x)dx} = -\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{360}$$

$$\mathbf{cos}\,31º = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{360} = 0.875 - 0.008 = 0.867$$

$$\therefore \mathbf{cos}\,31º = 0.867$$

y encontramos el valor aproximado de **cos** 31º**.**

## Diferenciales Sucesivas

Como: $\mathbf{dy} = \mathbf{f'(x)}\Delta\mathbf{x}$

Vemos que dy es una función de x, pues f ' y $\Delta\mathbf{x}$ son funciones de x

También: $\mathbf{dy} = \mathbf{f'(x)dx}$

Definimos “diferencial segundo”, como la diferencial de la diferencial primera.

$$\mathbf{d^2y} = \mathbf{d}(\mathbf{f'(x)dx}) = \mathbf{d(dy)}$$

Para esto, consideramos $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{constante}$, por lo tanto d**y** dependerá solamente de x. Considerando como función de x, podrá tener a su vez un diferencial.

$$\mathbf{d^2y} = \mathbf{d}(\mathbf{f'(x)}\Delta\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{x}\mathbf{d(f'(x))} = \Delta\mathbf{x}\mathbf{f''(x)}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f''(x)}(\Delta\mathbf{x})^2$$

$$\therefore \mathbf{d^2y} = \mathbf{f''(x)dx^2}$$

De esta relación obtenemos:

$$\frac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dx^2}} = \mathbf{f''(x)}$$

Esto se lee: “diferencial segundo de y respecto de x dos veces”.

Análogamente:

$$\mathbf{d^3y} = \mathbf{d}(\mathbf{f''(x)}(\Delta\mathbf{x})^2) = (\Delta\mathbf{x})^2\mathbf{d(f''(x))} = (\Delta\mathbf{x})^2\mathbf{f'''(x)}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f'''(x)}(\Delta\mathbf{x})^3$$

$$\therefore \mathbf{d^3y} = \mathbf{f'''(x)dx^3} \Rightarrow \frac{\mathbf{d^3y}}{\mathbf{dx^3}} = \mathbf{f'''(x)}$$

Esto se lee: “diferencial tercero de y respecto de x tres veces”

En general:

$$\mathbf{d^ny} = \mathbf{d}(\mathbf{d^{n-1}y})$$

$$\mathbf{d^ny} = \mathbf{f^{(n)}(x).dx^n} \Rightarrow \frac{\mathbf{d^ny}}{\mathbf{dx^n}} = \mathbf{f^{(n)}(x)}$$

La última expresión se lee: “diferencial n-ésimo de y respecto de x **n** veces”.

# Bibliografía

[1] EDWARDS Y PENNEY – Cálculo con Geometría Analítica – Prentice Hall – 1996

[2] LARSON, HOSTETLER, EDWARDS – Cálculo Vol I y Vol II – Mc Graw Hill – 1996

[3] LEITHOLD, L. – Cálculo con Geometría Analítica – Haria – 1992

[4] PURCEL, E; VARBERG, D. – Calculo Diferencial e Integral – Prentice Hall - 1993

[5] STEWARD – Cálculo – Mc Graw Hill - 1998

[6] TAYLOR Y WADE – Cálculo Diferencial e Integral

**INDICE**