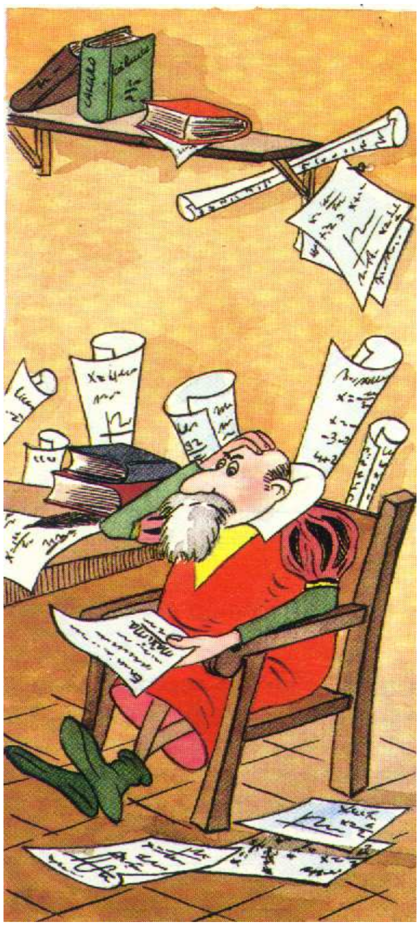
Universidad Nacional de Salta

Facultad de Ciencias Exactas



Los matemáticos hacemos muchas cuentas!!!... luego nos sentimos muy felices, esperamos que Uds. también...

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Prof. María de las Mercedes Moya

Ing. Silvia Pareja

2001

PREFACIO

La interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente nos proporciona información acerca del comportamiento de las funciones, lo cual resulta muy útil para trazar su gráfica.

Es por este motivo que en el presente apunte se pretende hacer uso de estas nociones para poder definir los *valores extremos de una función* los cuales se utilizan para resolver problemas de máximos y mínimos.

Uno de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial es el *Teorema del Valor Medio*. Se introduce en este capítulo dicho teorema, las distintas maneras de expresarlo y sus consecuencias. También la Generalización del Teorema del Valor Medio que se denomina *Teorema de Cauchy* para desde allí poder llegar a la *Regla de L'Hospital.*

Conscientes de la dificultad que conlleva para nuestros estudiantes el "trazado completo de una gráfica" y la "interpretación de problemas", se ha introducido en cada uno de los temas que se desarrollan, ejemplos insertados luego de la explicación teórica de cada uno de los conceptos. Además con la creencia de que se tenga una visión más global del tema se adjuntaron "otros" ejercicios adicionales.

Por otra parte, suele pensarse que la Matemática solamente se asocia con el rigor y el enigma y no se tiene en cuenta que simplemente son fruto de una noble y comprensible actividad humana. Sus creadores, los matemáticos, son seres de múltiples caracteres y personalidades, que han aportado a esta ciencia calor e imaginación, y cuya realidad está alejada de la imagen que normalmente es vista por las personas, generalmente como si fueran engreídos, especulativos que solamente describen los tópicos de su uso. Por este motivo, cuando se nombra a un matemático se ha colocado una breve descripción histórica para que se conozca el entorno en el cual han vivido los mismos.

Con la esperanza que el presente, les pueda servir de guía para su estudio, ya que solamente se ha restringido a algunas aplicaciones (las más usuales) es que en un futuro no muy lejano se pueda ampliar el mismo.

Estudiar Matemática puede resultarles una tarea tediosa, la idea es que, lo hagan disfrutando la misma. Aprender esta ciencia debe ser una experiencia "feliz". Matemáticamente podemos encontrar casos de felicidad en el siguiente sentido por parte de Uds. nuestros estudiantes. Se escucha normalmente:

"He estudiado toda la tarde y he logrado entender lo que el profesor/ra dijo en dos minutos"

"He hecho todos los problemas del práctico y algunos de los libros y por tanto lograré resolver cualquier cuestión rara que sea".

"Si estudio todo el curso lograré pasar el verano tranquilo"

"Como el Profesor me ha aprobado, le perdono todo lo que me ha hecho sufrir"

... estos conceptos se encuentran en un estado de felicidad basado en el esfuerzo, a las horas, a superar obstáculos; este no el camino sino más bien hay recuperar "esa felicidad" con la pasión, la razón y el placer.

Deben asumir que *"el aprendizaje es un viaje y no un destino"*. Recién están comenzando a conocer la belleza de la Matemática, disfrútenla con pasión para poder luego estar "felices" con lo aprendido.

"SEAN FELICES Y DISFRUTEN SU ESTUDIO"

Profesora María de las Mercedes Moya

I.- INTRODUCCIÓN

Nuestro estudio preliminar de las rectas tangentes y de las derivadas, nos permitió estudiar los límites. Con este conocimiento estamos ahora preparados para estudiar las derivadas de una manera más extensa.

Muchas son las aplicaciones que posee la derivada. La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones. Entre ellas podemos citar: razones de cambio, valores extremos de una función (máximos y mínimos) por ejemplo. Pero uno de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial es el Teorema del Valor Medio. Este teorema se usa para demostrar "otros" del Cálculo Integral.

La vida, a menudo nos enfrenta con el problema de encontrar "el mejor" modo de hacer algo. Por ejemplo: Supongamos que un agricultor quiere escoger la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para obtener el mayor aprovechamiento. Un médico desea escoger y aplicar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. Un fabricante deseará minimizar el costo de distribución de sus productos. Estos ejemplos muestran distintas aplicaciones que puede tener la derivada.

Trataremos de mostrar en esta sección las distintas aplicaciones de la derivada., ilustrando con ejemplos concretos en cada uno de los temas.

2.- RECTA TANGENTE Y NORMAL AL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

2.1.- Definiciones de recta tangente y normal

Presentamos a la derivada f '(x) como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (x, f(x)). Más precisamente, nos motivó la geometría de definir la recta tangente a la gráfica en el punto (x_0, f(x_0)) como la recta que pasa por P y tiene como pendiente:

i) la recta a través de P, cuya pendiente es m(x_0) que se define como:

$$m(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ si dicho límite existe}$$

ii) la recta $x = x_0$ si:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

o bien :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

Si no se cumple i), y tampoco ii) no existe una recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, \mathbf{f}(x_0))$.

Por ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva f(x) = x^3 – 1 en el punto P (-1,-2).

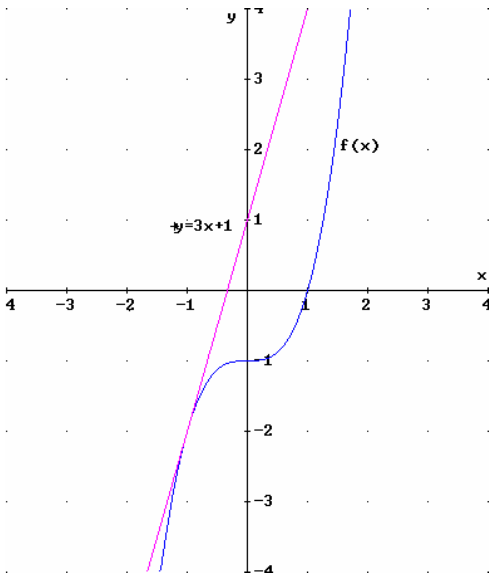
Solución:

Sabemos que la ecuación de la recta que pasa por un punto es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde m es la pendiente de la recta. De acuerdo a la definición anterior: $m = f\,'(x_0)$

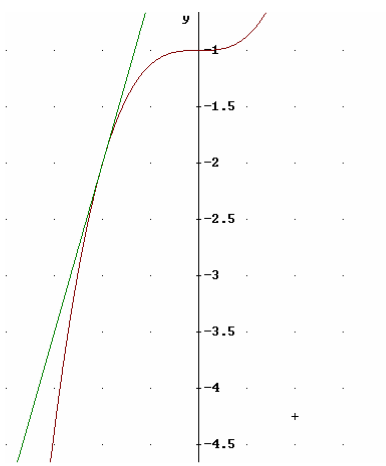
Por lo tanto para encontrar la ecuación de la recta tangente, debemos encontrar su pendiente, ya que los datos de los puntos ya los tenemos.

Entonces: $f\,'(x) = 3x^2 \Rightarrow f\,'(-1) = 3.(-1)^2 = 3$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente al gráfico de f es: $y + 2 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 3 - 2 \Rightarrow y = 3x + 1$

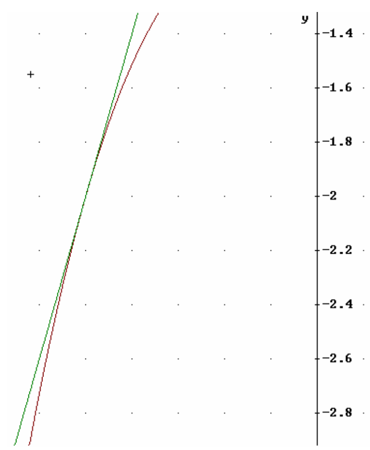
Así la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función f que pasa por el punto de coordenadas (-1,-2).



El gráfico muestra la función f, la recta tangente a la curva en el punto P(-1,-2). Es importante señalar que la tangente a una curva en un punto P dado nos da idea de la suavidad de la curva. Esto nos indica además que la recta tangente a una curva es “una aproximación lineal” de la misma, lo cual significa que si no conocemos la curva, pero si su tangente en un entorno de un punto, este dato nos da una idea del comportamiento de la función en un entorno del punto en estudio. Para poder visualizar lo anteriormente expresado, es conveniente realizar una mirada “con lupa” en el entorno del punto dado y ver que curva y tangente se confunden en las inmediaciones del mismo.



Los gráficos muestran dos acercamientos de la recta tangente a la curva en el punto (-1,-2).



Definición:

Se llama recta normal a la curva en el punto P, a la perpendicular a la tangente trazada en P.

Por lo tanto, como la recta normal también pasa por P, tiene ecuación de la forma:

$y - y_0 = m_1\,(x - x_0)$. Y recordando que la condición de perpendicularidad establece que una recta es perpendicular a otra cuando su pendiente es invertida y cambiada de signo, tenemos que: $m_1 .\, f\,'(x_0) = -1$

Así si $f\,'(x_0) \neq 0$, entonces, $\mathbf{m}_1 = -\dfrac{1}{\mathbf{f'(x_0)}}$

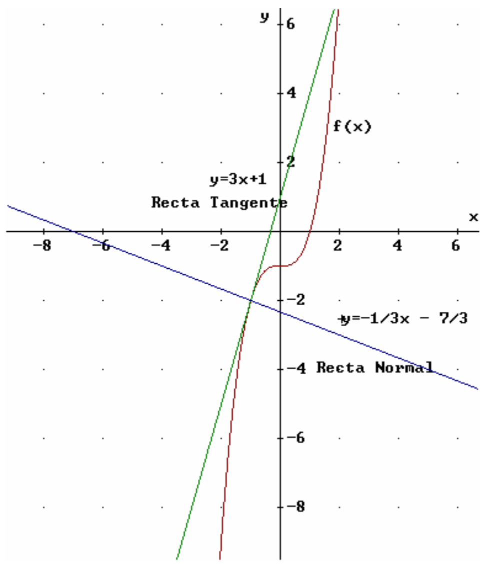
Por lo tanto la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

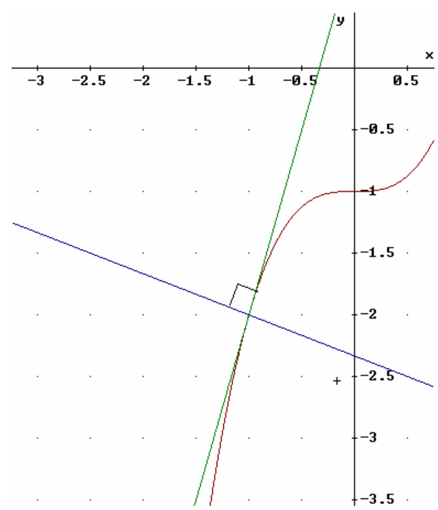
$$\mathbf{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Si $f\,'(x_0) = 0$ entonces la tangente es paralela al eje x (y su ecuación es $y = y_0$) y en consecuencia la normal será paralela al eje y con ecuación de la forma $x = x_0$

En el caso de la función $f(x) = x^3 - 1$ en el punto de coordenadas (-1,-2), la ecuación de la recta normal será:

$$\mathbf{y} + 2 = -\frac{1}{3}(\mathbf{x} - 1) \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = -\frac{1}{3}\mathbf{x} - \frac{7}{3}$$





Los gráficos muestran las rectas tangente y normal a la curva en el punto (-1,-2). Además se ha realizado un zoom en las cercanías del punto. Puede visualizarse claramente que las rectas tangente y la normal forman un ángulo recto.

2.2.- Ejemplos de aplicación de recta tangente y normal

1. *Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva* $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ *en el punto* M(3,2).

   Para encontrar la ecuación de la *recta tangente* necesitamos la pendiente de dicha recta ($f'(x)$) evaluada en el punto considerado y un punto por el que pase, en este caso M(3,2).

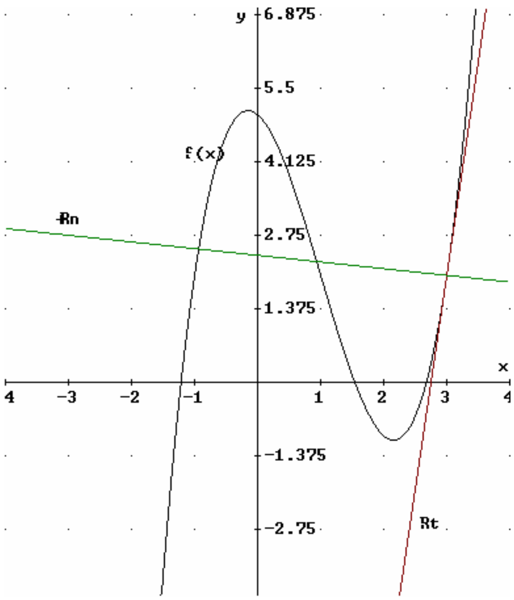
Así, sabemos que la ecuación de una recta es: y = mx + n, donde m es la pendiente y en este caso $m = f'(3)$.

Encontrando la expresión de la derivada tenemos $f'(x) = 3x^2-6x-1$, entonces:
$f'(3) = 3.3^2 - 6.3 – 1 = 8$. Reemplazando en la ecuación de la recta, y = 8x + n, de donde si consideramos que la recta pasa por el punto de coordenadas (3,2), podemos hacer:
$2 = 8.3 + n$, $n = -22$

La expresión de la recta tangente es:

$$\mathbf{y = 8x – 22}$$

Ahora, para hallar la ecuación de la recta normal, procedemos de manera similar teniendo en cuenta que dos rectas son perpendiculares entre sí, si el producto de sus pendientes es igual a -1. Entonces la pendiente de la recta normal es :
$m = -1/f'(3) = -1/8$. El punto M(3,2) también es un punto de la recta normal, entonces procediendo de forma similar al caso anterior hacemos:
$y = (-1/8)x + n$, entonces $2 = (-1/8).3 + n$ y $n = 2 + (3/8) = 19/8$.



La expresión de la recta normal es:

$$\mathbf{y = (-1/8)x +(19/8)}$$

El gráfico muestra la función f, su recta tangente y normal en el punto M(3,2).

2. *Hallar la ecuación de la tangente a la parábola* $y^2 = 20x$ *que forma con el eje Ox un ángulo de* 45°.

En este caso el dato que tenemos es el ángulo, y sabemos que la pendiente de la recta tangente corresponde a la tangente trigonométrica de dicho ángulo.

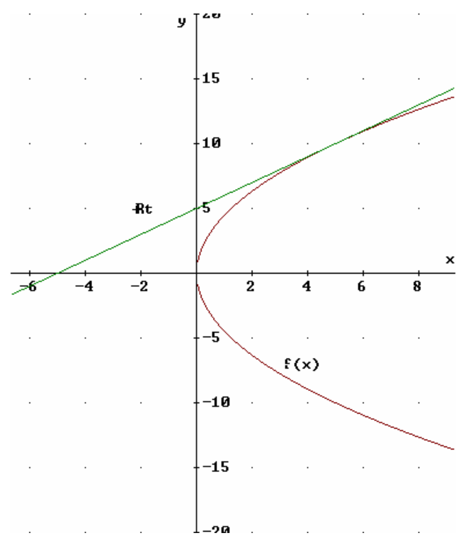
Entonces, $m = tg\ (45^\circ) = 1$.

Es decir $f'(x_0) = 1$, por lo que podremos encontrar el punto donde la recta es tangente a la curva de la función $y^2 = 20x$. Derivando la función implícita $y^2 -20x = 0$, obtenemos $2yy'-20 = 0$, reemplazando el valor $y'=1$, $2y-20 = 0$, $y = 10$, y reemplazando en la expresión de la función puesto que el punto también pertenece a la misma, obtenemos el correspondiente valor de x el cual es: $10^2 = 20x$, con lo que x = 5.

Entonces:
$y = mx + n = x + n$, sustituyendo $10 = 5 + n$ por lo que $n = 5$ y la expresión de la recta tangente nos queda:

$y = x + 5$

El gráfico muestra la función f con su respectiva tangente en el punto de estudio.



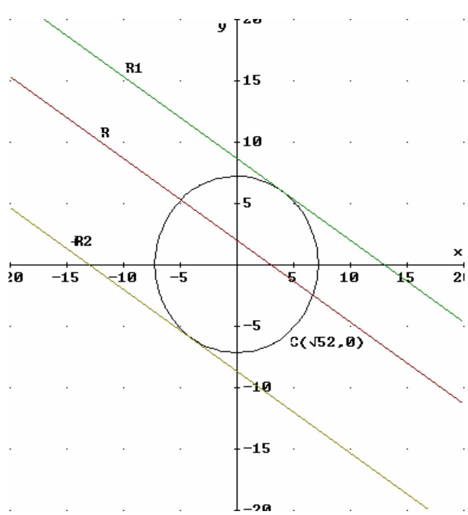
3. *Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia* $x^2 + y^2 = 52$*, paralelas a la recta* $2x + 3y = 6$.

La pendiente de las rectas tangentes la obtenemos como:
$2x + 2yy' = 0$, $x + yy' = 0$. Además deben ser paralelas a la recta dada por lo que tienen que tener su misma pendiente, entonces $y' = -2/3$. Se sigue que $x – 2/3y = 0$, $y = (3/2)x$; reemplazando este valor en la expresión de la función tenemos:

$$x^2 + [(3/2)x]^2 = 52, \quad x^2 [\,1+ (9/4)] = x^2\,(13/4) = 52$$

Entonces x tomará los valores $x = 4 \wedge x = -4$, con $y = 6 \wedge y = -6$, respectivamente.
Ya tenemos la pendiente de las rectas tangentes y los puntos por donde pasa cada una de ellas, y las ecuaciones de las mismas obtenidas de forma similar a los ejercicios anteriores, son:

$$y_1 = (-2/3)x + 26/3 \quad \wedge \quad y_2 = (-2/3)x - 26/3$$



3.- RAZON DE CAMBIO

La derivada tiene una interpretación física interesante que estuvo muy íntimamente vinculada con ella en su desarrollo histórico y merece la pena mencionar.

Desde el punto de vista físico la derivada sirve, naturalmente, para estudiar aquello para lo cual inicialmente se inventó, la rapidez del movimiento y la rapidez de los cambios en general, así como la cuantificación de la influencia de una causa sobre sus efectos.

Lo primero que hicimos es presentar a la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a su gráfica. Ahora presentaremos algo también sumamente importante que será la razón de cambio de esa función respecto a la variable independiente.

Veremos la ***“razón instantánea de cambio”*** de una función cuya variable independiente es el tiempo t. Supongamos que Q es una cantidad que varía con respecto del tiempo t, y que escribimos Q = f(t) para el valor de Q en el instante t. Por ejemplo, Q podría ser:

- El tamaño de una población (de canguros, gente o bacterias)
- La cantidad de pesos en una cuenta bancaria.
- El volumen de un globo que está siendo inflado.
- La cantidad de agua en una reserva con flujo variable.
- La cantidad de producto químico producido en una reacción.
- La distancia recorrida t horas después del comienzo de un viaje.

El cambio Q desde el tiempo t hasta el tiempo t + Δt es el **incremento**

$$\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$$

La *“**razón de cambio promedio**”* de Q (por unidad de tiempo) es, pr definición la razón de cambio de ΔQ en Q con respecto del cambio Δt en t, por lo que es el cociente:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Definimos la ***“razón de cambio instantánea”*** de Q (por unidad de tiempo) como el límite de esta razón promedio cuando Δt tiende a cero. Es decir la razón de cambio instantánea de Q es:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Pero el límite del lado derecho de la ecuación es simplemente f ’(t). Así vemos que la razón de cambio instantánea de Q= f(t) es la derivada

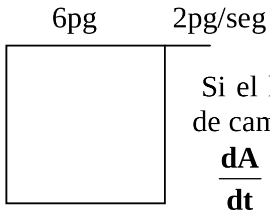
$$\frac{dQ}{dt} = f'(t)$$

Ejemplo 1:

Un cuadrado se expande de forma que su lado cambia a razón de 3 pulgadas por segundo. Cuando su lado es de 6 pg de largo hallar la razón de cambio de su área.

Solución:

El área del cuadrado como función de su lado está dado por la función: A (x) = x^2



Si el lado está dado como una función del tiempo t; x = x(t), la razón de cambio respecto al tiempo será:

$$\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dx}}\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$

Pero: $\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dx}} = 2\mathbf{x}$ y $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = 2$ (la condición del problema es que el lado cambia a razón de 2pg/seg)

Como x = 6, pues el lado mide 6pg. Entonces:

$$\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = 2.6.2 = 24\mathbf{pg}^2\,/\,\mathbf{seg}$$

Ejemplo 2:

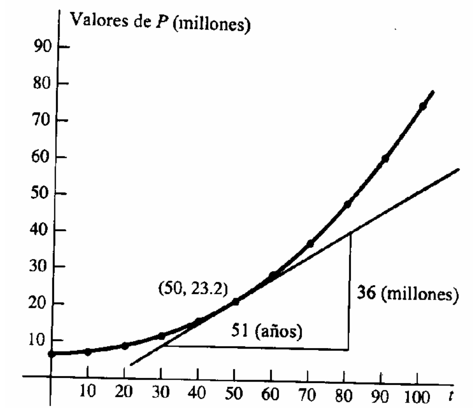
Los científicos e ingenieros trabajan frecuentemente con tablas de valores obtenidas a partir de observaciones o experimentos. Veamos como tabular las razones de cambio instantáneas de estas funciones.

La siguiente tabla muestra la población P en los Estados Unidos (en millones) en el siglo diecinueve, con intervalos de 10 años. Estimemos la razón instantánea de crecimiento de la población en 1850.

t	**Año**	**Población de los EE.UU (en millones)**
0	1800	5.3
10	1810	7.2
20	1820	9.6
30	1830	12.9
40	1840	17.1
50	1850	23.2
60	1860	31.4
70	1870	38.6
80	1880	50.2
90	1890	62.9
100	1900	76.0

Solución:

Consideremos t = 0 (años) en 1800, por lo que t = 50 corresponde al año 1850. Podemos graficar la función con una curva que se adapte a estos datos:



Sin importar como obtengamos, una curva adaptada a los datos debe ser una buena aproximación de la gráfica real de la función desconocida P = f(t). La razón de cambio instantánea dP/dt en 1850 es la pendiente de la recta tangente en el punto (50, 23.2). Trazamos la tangente lo más aproximada posible, mediante una inspección visual y después medidos la base y la altura del triángulo de la figura.

De esta manera aproximamos la pendiente de la tangente en t = 50 como:

$\frac{\mathbf{dP}}{\mathbf{dt}} \cong \frac{36}{51} \cong 0.71$ millones de personas por año (en 1850). Aunque no hubo un censo nacional en 1851, podríamos estimar que la población de Estados Unidos era aproximadamente de 23.2 + 0.7 = 23.9 millones de habitantes.

4.- VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

4.1.- Definiciones

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal, de modo que su posición x en el instante t está dada por la función de posición x = f(t). Así, hacemos la línea de movimiento sea un eje coordenado con un origen y una dirección positiva; f(t) es solamente la básica de la partícula en movimiento en el instante t.

x = 0 x = f(t)

Si pensamos en el intervalo de tiempo de **t** a (**t** + Δ**t**), la partícula se mueve de la posición f(t) a la posición f(**t** + Δ**t**) durante ese intervalo. Su desplazamiento es el incremento:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f(t+\Delta t) - f(t)}$$

Calculemos la ***"velocidad promedio"*** de la partícula durante este lapso exactamente como calcularíamos la velocidad promedio en un largo viaje: dividimos la distancia entre el tiempo para obtener una velocidad promedio, en kilómetros por hora. En este caso dividimos el desplazamiento de la partícula entre el tiempo transcurrido para obtener la "velocidad promedio".

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{f(t+\Delta t) - f(t)}}{\Delta \mathbf{t}}$$

La barra superior es un símbolo estandar que denota por lo general un promedio de "algún tipo".

Definimos ***"velocidad instantánea"*** v de la partícula en el instante t como el límite de la velocidad promedio cuando Δ**t** tiende a cero. Esto es:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f(t+\Delta t) - f(t)}}{\Delta \mathbf{t}}$$

De nuevo, el límite de la derecha es la definición de la derivada de f con respecto al tiempo t. Por lo tanto, la velocidad de la partícula en movimiento en el instante t es simplemente:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{f'(t)}$$

Así la ***"velocidad" es la razón de cambio instantánea de la posición***. La velocidad de una partícula en movimiento puede ser positiva o negativa, según si la partícula se mueve en dirección positiva o negativa a lo largo de la línea en movimiento. Definimos la **"rapidez"** de la partícula como el *valor absoluto* de la velocidad: $|\mathbf{v}|$

Ejemplo:

Un automóvil se mueve a lo largo del eje x (horizontal). Suponga que su posición (en m) en el instante t (en segundos) está dada por: $x(t) = 5t^2 + 100$

Entonces su velocidad en el instante t es: v(t) = x'(t) = 10t

Puesto que x(0) = 100 y v(0) = 0, el automóvil parte del reposo(v(0)=0) en el instante t = 0, desde el punto x = 100. Si t = 10, vemos que x(10) = 600 y v(10) = 100, por lo que después de 10 seg.el automóvil ha viajado 500 m (desde su punto inicial x = 100) y su rapidez es de 100 m/seg.

La ***"aceleración"*** de una partícula se define como la razón de cambio instantánea (derivada) de su velocidad:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}^2\mathbf{x}}{\mathbf{dt}^2} = \mathbf{f''(t)}$$

Hemos definido la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Por lo tanto la aceleración es la derivada segunda de la posición respecto del tiempo. Esa notación debe leerse: derivada segunda de x respecto de t dos veces; pues derivamos respecto a t una vez y luego otra vez.

Ejemplo:

Un punto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontalmente en tal forma que su posición en el momento t está especificado mediante:

$$\mathbf{s = t^3 - 12\, t^2 + 36t - 30}$$

s se mide en pies y **t** se mide en segundos.

a) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

b) ¿Cuándo es positiva la velocidad?

c) ¿Cuándo se mueve hacia atrás el objeto?

d) ¿Cuándo es positiva la aceleración?

Solución:

a) $v = ds/dt = 3t^2 - 24t + 36$

Como queremos responder cuando la velocidad se hace cero, hacemos v = 0. De este modo nos queda:

$3t^2 - 24t + 36 = 0$. Dividiendo la expresión por 3 nos queda: $t^2 - 8t + 12 = 0$ y resolviendo la misma, encontramos como solución $t_1 = 6$ y $t_2 = 2$

Por lo tanto, la velocidad es nula a los 2 seg. y a los 6 seg.

b) La ecuación nos quedó: $3 (t - 6)(t - 2) > 0$

Para ello realizamos una tabla:

	2	**4**	**6**
t – 2	- - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + +
t - 6	- - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + +	+ + + + + + + + +
(t – 2)(t - 6)	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Por lo tanto: v > 0 cuando $t \varepsilon (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

c) El punto se mueve hacia la izquierda cuando la velocidad es negativa. Esto es cuando $t \varepsilon (2,6)$.

d) $s''(t) = 6t - 24$ o lo que es equivalente $s''(t) = 2t - 8$.

Como nos piden que la aceleración sea positiva, esto ocurre cuando t > 4 seg.

Algunas apreciaciones:

Si t = 0 corresponde al momento presente, entonces t < 0 corresponde al pasado y t > 0 al futuro. En múltiples problemas, será obvio que sólo estaremos interesados en el futuro. Sin embargo, como el enunciado del ejemplo no especifica, parece razonable permitir que t tenga valores tanto positivos como negativos.

El Libro de la Naturaleza

"El gran libro de la naturaleza siempre está abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él... Pero no la podemos leer a menos que hayamos aprendido primero el lenguaje y los caracteres con los cuales está escrito... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas".(Galileo Galilei)

Es posible que Galileo haya tenido razón en sostener que el libro de la naturaleza esta escrito en lenguaje matemático. Ciertamente la actividad científica parece, en gran medida, un esfuerzo para probar que él estaba en lo cierto. La tarea de tomar un fenómeno físico y representarlo en símbolos matemáticos se llama **"modelización matemática"**. Uno de estos elementos básicos es traducir descripciones hechas con palabras en lenguaje matemático. Hacer esto, especialmente en conexión con las razones de cambio, se volverá cada vez más importante cuando queremos expresar un problema en términos matemáticos.

Veamos algunos problemas en los cuales se los describen con palabras:

1. El agua está goteando de un tanque cilíndrico a una razón proporcional a la profundidad del agua. Su modelización matemática será: Si V denota el volumen del agua en el tiempo t entonces: $\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-k.h}$ donde h es la altura del cilindro y k una constante de proporcionalidad.

2. La rueda está girando a una razón constante de 6 revoluciones por minuto, esto es, $6(2\pi)$ radianes por segundo. Su modelización matemática será: $\frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}} = 6(2\pi)$

3. La altura de un árbol continua creciendo pero a una razón cada vez más baja. Su modelización matemática será: $\frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{dt}} > 0,\quad \frac{\mathbf{d^2h}}{\mathbf{dt^2}} < 0$

4.2.- Ejemplos de aplicación de velocidad y aceleración

1. *Hallar la velocidad del movimiento uniformemente acelerado en un instante arbitrario* t *y en el* t = 2 seg*, si el espacio recorrido en función del tiempo se expresa por la fórmula siguiente:*

$$\mathbf{s = (1/2)\, g\, t^2}$$

La velocidad nos dice cómo varía el espacio recorrido a medida que varía el tiempo. Matemáticamente, esto es lo mismo que decir que la velocidad es la derivada del espacio en función del tiempo. En nuestro ejemplo, $v = s' = g\,t$. Esta es la expresión de la velocidad para un instante arbitrario t, por lo que si t = 2 seg,
$v = 2g$ (g es la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/seg^2).

2. *Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación*

$$\mathbf{s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1}$$

Determinar los intervalos de tiempo cuando la partícula se desplace a la derecha y cuando lo haga a la izquierda. También determinar el instante en el cual cambia de sentido el movimiento.

Quien me indica la dirección del movimiento es el signo de la velocidad, con la convención de que si es positiva la partícula se desplaza hacia la derecha y al revés si es negativa. Sabemos que la derivada de s = s(t) nos indica la razón de cambio del espacio recorrido en función del tiempo, esto es lo que se conoce como "velocidad instantánea". Por lo tanto, para dar respuesta al problema, hacemos:

$$\mathbf{s'(t) = 6t^2 - 8t + 2}$$

Para analizar los signos de esta expresión la factorizamos quedando $s' = 6(t-1/3)(t-1)$
Analicemos la variación de los signos a través de una tabla:

	t <1/3	1/3<t<1	1< t
t – 1/3	-	+	+
t – 1	-	-	+
Signo s'	+	-	+
Desplazamiento	A derecha	A izquierda	A derecha

Los instantes en los cuales el móvil cambia de sentido en el movimiento serán aquellos en los cuales $s' = 0$, y esto sucede cuando t = 1/3 y t = 1.

3. *Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 m/s. Si el sentido positivo de la distancia, desde el punto de partida, es hacia arriba, la ecuación de movimiento es* **$S = -5t^2 + 20t$**
   Si t *es el tiempo, en segundos, que ha transcurrido desde el momento de lanzar la pelota, y s es la distancia de la pelota, en metros, desde el punto de partida a los* t segundos, *hallar*:
   a) *la velocidad instantánea de la pelota al término de* 1 segundo.
   b) *La velocidad instantánea de la misma a los* 3 segundos.
   c) ¿ cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar el punto más alto?.
   d) ¿ qué altura máxima alcanzará la pelota?.
   e) *La rapidez de la misma al término de* 1 *y* 3 segundos.
   f) ¿ cuántos segundos tarda la pelota en llegar al suelo?.
   g) *La velocidad instantánea de la pelota al llegar al suelo.*

La velocidad instantánea de la pelota es v(t) = -10t + 20. Entonces:

a) v(1) = -10.(1) + 20 = 10 m/s. Entonces al término de 1 segundo la pelota está subiendo a 10m/s.
b) V(3) = -10.(3) + 20 = -10 m/s.
   A los 3 segundos la pelota está bajando a –10 m/s.
c) En el punto más alto el sentido del movimiento cambia, entonces allí la velocidad es nula, entonces

$$v(t) = -10t + 20 = 0 \text{ y } t = 2 \text{ segundos}$$

d) Para encontrar el punto más alto alcanzado por la pelota reemplazamos el tiempo en t = 2 segundos en la expresión de s, obteniendo s = 20 metros.
e) Sin tener en cuenta el sentido del movimiento, al término de 1 segundo y de 3 segundos, la rapidez es la misma, y es igual a 10 m/s.
f) La pelota se encuentra en el suelo cuando s = 0 metros.
   Haciendo $s(t) = -5t^2 + 20t = 0$, obtenemos los valores para t de 0 y 4 segundos, pero como t = 0 segundos corresponde al momento de partida, entonces la pelota vuelve a tocar al suelo a los 4 segundos.
g) La velocidad al llegar al suelo la obtenemos reemplazando t = 4 en la expresión de la velocidad, lo que nos da v(4) = -20 m/s.

5.- TEOREMA DE ROLLE [1]

Sea f una función tal que:

a) f continua en [a,b]

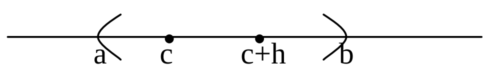
b) f derivable en (a,b)

c) f(a) = f(b)

Entonces, $\exists$ **c**: a < **c** < b $\wedge$ f ’(**c**) = 0

Demostración:

- Si f es una función constante, esto es: f(x) = k, $\forall$ x ε [a,b] $\Rightarrow$ f ’(x) = 0, $\forall$ x ε (a,b). Entonces podemos elegir **c** a cualquier punto del intervalo (a,b)
- Si f no es constante (f(x) $\neq$ k) entonces $\exists x_0$ ε (a,b) para el cual f(x_0) > 0 $\vee$ f(x_0) < 0.
  Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f(x_0) > 0 y sea **c** un punto de (a,b) tal que: f(c) $\geq$ f(x) $\forall$ x ε [a,b]. Sabemos que tal punto existe, pues f es continua en [a,b] y en consecuencia alcanza su máximo o mínimo en algún punto de dicho intervalo. Esto es por el Teorema de Bolzano – Weierstrass.
  Tenemos así que f(c) > 0 $\wedge$ f(a) = f(b) (por hipótesis).
  Elegimos h $\neq$ 0 de modo que (c+h) ε (a,b).



f(**c**+h) $\leq$ f(**c**) pues en **c** alcanza su máximo. O lo que es equivalente: f(**c**+h) - f(**c**) $\leq$ 0

Entonces:

$\dfrac{\mathbf{f(c+h)-f(c)}}{\mathbf{h}}$ tendrá el signo dependiendo del signo de **h**

Así:

Si **h** > 0

$$\mathbf{f'_+(c)} = \frac{\mathbf{f(c+h)-f(c)}}{\mathbf{h}} \leq 0 \qquad \therefore \mathbf{f'_+(c)} \leq 0$$

Si **h** < 0

$$\mathbf{f'_+(c)} = \frac{\mathbf{f(c+h)-f(c)}}{\mathbf{h}} \leq 0 \qquad \therefore \mathbf{f'_+(c)} \leq 0$$

Como f es derivable en (a,b) $\wedge$ c ε (a,b) $\Rightarrow$ $\exists$ f ’(**c**) tal que:

$\therefore \mathbf{f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c)}$ y además

$0 \leq \mathbf{f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c)} \leq 0 \quad \therefore \ \mathbf{f'(c)} = 0$

---

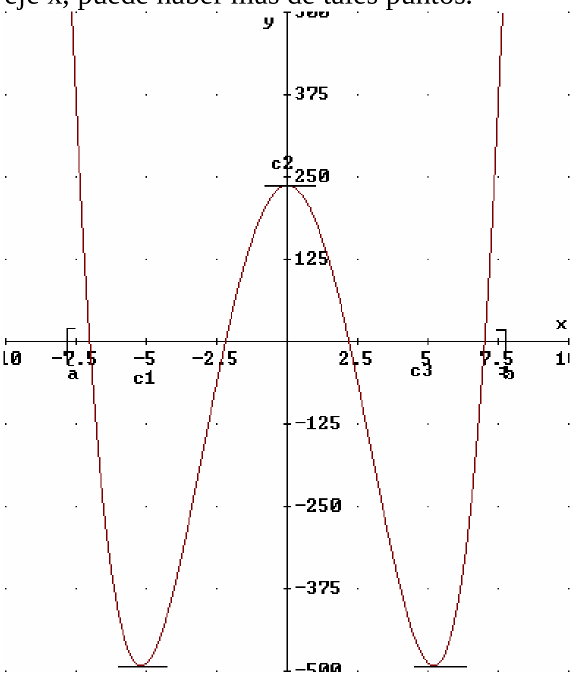
[1] Son curiosas las vueltas que da la historia, también la de la Matemática. Michel Rolle, un matemático francés de fines del siglo XVII, formaba parte de un grupo que se oponía frontalmente al desarrollo del cálculo infinitesimal, según ellos *“una colección de ingeniosas falacias”*, de las que el marqués de L’Hospital era el máximo expositor y defensor. El grupo de Rolle contraponía la transparencia de la Geometría de los griegos a las obscuridades del Cálculo.

En 1691, a propósito de un problema algebraico – geométrico, Rolle enunció sin demostración el Teorema que lleva su nombre. Hoy los dos nombres, Rolle y L’Hospital, figuran en todos los libros de Cálculo fraternalmente enlazados y a cualquiera le podría parecer como si Rolle hubiera sido uno de los padres fundadores de la teoría que tan ardientemente detestó.

Un argumento similar será válido si se considera $(x_0) < 0$ (Ejercicio para el lector)

Interpretación Geométrica

Geométricamente, el Teorema de Rolle tiene una interpretación muy sencilla. Si la gráfica de una función es una curva continua con puntos extremos en el eje x, en P (a,k) y Q(b,k) y si la curva tiene una tangente en cada punto excepto en los extremos, entonces debe existir al menos un punto de la curva en el que la tangente sea paralela al eje x.
Notemos que si se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle, dicho teorema nos garantiza la existencia *"de al menos"* un punto de la gráfica cuya tangente sea paralela al eje x, puede haber más de tales puntos.

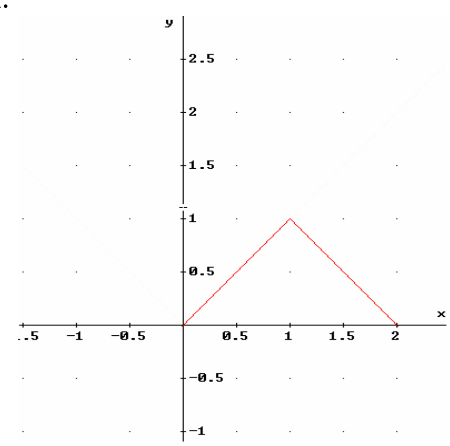


Podemos observar el gráfico de la función $f(x) = x^4 - 54x^2 + 237$, y visualizar la existencia de tres valores de **c.**
Como la función dada es un polinomio, es una función continua en todo el eje real, en particular lo será en un intervalo cerrado contenido en R, además las funciones polinómicas son derivables en toda la recta real y en particular lo será en un intervalo abierto. Por otro lado, la función dada cumple que f(a) = f(b). Por lo tanto "todas las hipótesis" del Teorema de Rolle están satisfechas, y por ende se asegura la existencia de al menos un **c** en el que la tangente en ese punto sea paralela al eje de las x. en este caso encontramos 3 valores de **c**.

Observaciones

- La condición de que la derivada exista en "todos los puntos interiores" de (a, b) es esencial. Pues si observamos la siguiente función:

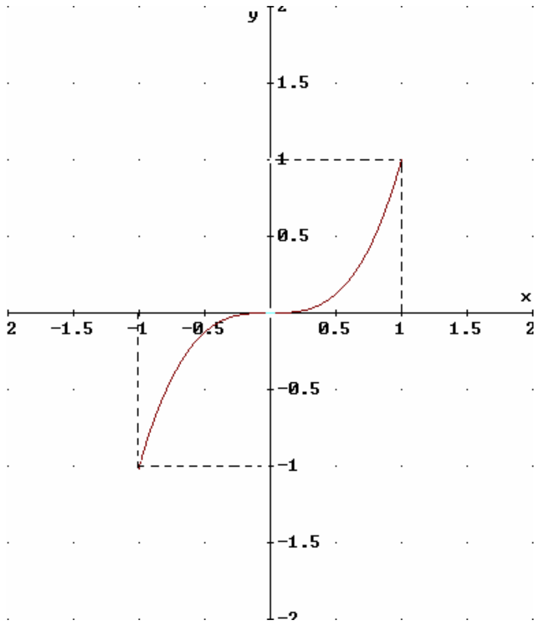
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x} & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \end{cases}$$



f es continua en [0,2]
f(0) = f(2) = 0
Pero no existe la derivada de la función en el punto x = 1. Por lo tanto no podemos aplicar el Teorema de Rolle.
Vemos que la conclusión del Teorema en este caso es falsa. Insistimos, si las hipótesis del Teorema no se cumplen, la conclusión puede ser verdadera o falsa, lo cual no contradice en "absoluto" el Teorema de Rolle, solo nos dice que no podemos aplicar el mismo.

- La hipótesis f(a) = f(b) también es esencial. Para ver esto podemos visualizar el siguiente ejemplo:

  $F(x) = x^3$ en el intervalo [-1,1]



f es continua en [-1,1], por ser un polinomio. (es continua en todo el eje real).
f es derivable en (-1,1), por ser un polinomio (es derivable en todo el eje real)
Como f(-1) = -1 y f(1) = 1, resulta no se cumple una de las hipótesis del Teorema de Rolle, y por lo tanto no podemos asegurar la existencia de un **c** tal que:
-1 < **c** < 1 en el cual la tangente sea paralela al eje de las x .
En este caso, se cumple que en x = 0, la recta tangente es justamente y = 0 y en consecuencia la tesis del teorema es cierta.

Como el antecedente es falso, no podemos aplicar el Teorema, ya que la conclusión puede ser verdadera o falsa. En el caso anterior, la conclusión resultó falsa, en este ejemplo resulta verdadera.

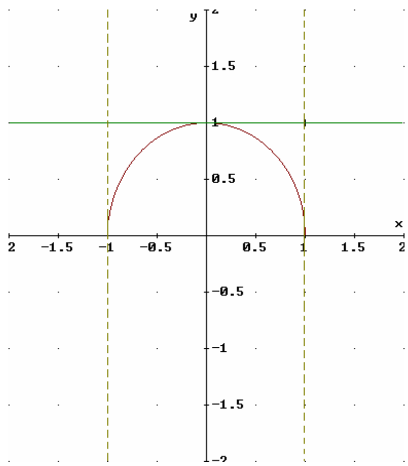
Por ello, hay que tener "sumo cuidado" en la aplicación del Teorema, pues debemos asegurarnos que "todas las hipótesis" se cumplan para poder utilizarlo. De lo contrario estaremos incurriendo en un error lógico en la aplicación del mismo.

- La condición f continua [a,b] y derivable en (a,b) puede resultar "chocante". ¿Porqué no exigir simplemente derivable en [a,b]?. De ese modo pareciera que nos resultaría más cómodo recordar el mismo. Con esto exigiríamos la existencia de las derivadas laterales en los puntos extremos del intervalo.
  El motivo de ello es que hay funciones con tangente vertical y por lo tanto "*no derivables*", en alguno de los extremos que quedarían "injustamente" separadas de los beneficios del Teorema de Rolle.

  Para visualizar lo dicho, basta tomar la función: $\mathbf{f(x)} = \sqrt{1-\mathbf{x}^2}$

  Esta función es:
  continua en [-1,1]
  derivable en (-1,1)
  f(-1) = f(1)
  Pero la misma no es derivable en [-1,1].

  Este es un muy buen ejemplo para mostrar "el porque" Rolle ha excluido la condición de derivabilidad en los extremos del intervalo.



Se observa el gráfico de la función $\mathbf{f(x)} = \sqrt{1-\mathbf{x}^2}$, la existencia de **c** tal que la tangente en ese punto es paralela al eje de las x. En este caso **c = 0**.
Además puede visualizarse las tangentes en los puntos x = 1 y x = -1 que son paralelas al eje de las ordenadas.
Esta es una función que no admite derivada en los puntos mencionados y cumple la tesis del Teorema.
Esta es el motivo por el cual no se le exige a las funciones que sean derivables en los extremos del intervalo.
Muchas veces en Matemática debemos restringir hipótesis en un Teorema para poder de esa manera tener mayores aplicaciones del mismo. En este caso particular, más funciones que satisfagan la tesis del Teorema de Rolle.

6.- TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

6.1.- Teorema de los Incrementos Finitos ó Teorema de Lagrange[2]

Sea f con las siguientes propiedades:

a) f continua en [a,b]
b) f derivable en (a,b)

Entonces existe un número **c** tal que a < **c** < b $\wedge$ $\mathbf{f'(c)} = \dfrac{\mathrm{f(b) - f(a)}}{\mathrm{b - a}}$

Demostración:

[2] Lagrange nació en 1736 en Turín, de familia pobre. A los 19 años era Profesor en Matemática en la Escuela de Artillería de Turín. Con un grupo de alumnos comenzó lo que luego se llamaría "La Academia de Ciencias de Turín". A sus 25 años, resolvió mediante cálculo de variaciones el problema que la figura de mayor área con el mismo perímetro es el círculo, por lo que Euler le escribió una carta de felicitación. Fue llamado por Federico II a formar parte de la Academia de Berlín en 1766 mediante la siguiente misiva: *"Es necesario que el geómetra más grande de Europa viva cerca del más grande de los reyes"*. Para Lagrange, la posibilidad de sustituir imágenes y figuras por descripciones formales de ecuaciones y funciones le llevó a escribir su celebrado trabajo "Mecánica Analítica", que "no se encontrarán figuras en esta obra, sólo operaciones algebraicas". Evidentemente, en el siglo XVIII, las cuestiones de imágenes no debían tener mayor importancia. Fue en Berlín donde trabajó con gran esfuerzo en temas del Análisis, la Mecánica y la Astronomía. En 1786, Luis XIV de Francia lo invitó donde hizo gran amistad con el químico Lavoisier y en parte agotado por los esfuerzos realizados en Berlín sufrió grandes depresiones y desganas para trabajar en Matemática. Cuando en 1788 fue publicado su obra maestra "Mecánica Analítica", ni siquiera quiso abrir su tapa. La época de terror (1793 – 1794) le trajo más sufrimientos, como por ejemplo el guitollinamiento de su amigo Lavoisier. El terror le perdonó la vida por ser extranjero y además se requería de su ayuda científica. Luego publicó varios libros de Cálculo, de Funciones Analíticas, etc. Tal fue la cantidad de contribuciones realizadas por Clairaut, Euler, D'alambert, Lagrange y Laplace que llegó a cundir el pesimismo sobre el futuro de la Matemática. Casi todo lo importante parecía resuelto. Quizás por ello, Lagrange escribió a D'Alambert en una carta: "¿No le parece que la sublime geometría tiende un poco hacia la decadencia?. Solo recibe el sostén de Ud. y del señor Euler", aquí Lagrange se equivocó. Tuvo como objetivo proporcionar rigor al Cálculo Infinitesimal, aunque por un camino equivocado. Pero el esfuerzo estimuló a Cauchy que siguió un curso más destacado. Napoleón, en una ocasión, comentó el problema de inscribir un cuadrado en una circunferencia con centro marcado y utilizando sólo un compás. Lagrange le replicó: "General, podíamos esperar cualquier cosa de vos menos lecciones de geometría". Fue el mismo Napoleón que lo convirtió en Conde y Senador. Murió en 1813 con esos títulos.

La demostración se realizará mediante una función G que satisfaga las condiciones del Teorema de Rolle.

La recta secante que pasa por P(a, f(a)) y Q(b,f(b)) esta dada por:

$$\frac{\mathbf{y-f(a)}}{\mathbf{x-a}} = \frac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\text{b - a}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x - a) + f(a)$$

Sea G definida por:

$\mathbf{G(x) = f(x) - y}$ O sea G(x) es la diferencia de la función f con la recta secante.

$$\mathbf{G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$

Vemos que G es una función que cumple las condiciones:

- G es continua en [a,b], pues es suma de dos funciones continuas. f(x) es continua por hipótesis y la recta secante es continua por ser un polinomio.
- $\mathbf{G'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\text{b - a}}}$ existe ∀ x ε (a,b) ya que f ’(x) existe sobre (a,b) y la función lineal es derivable para todos los reales.
- $\mathbf{G(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\text{b - a}}}(a - a) = 0$

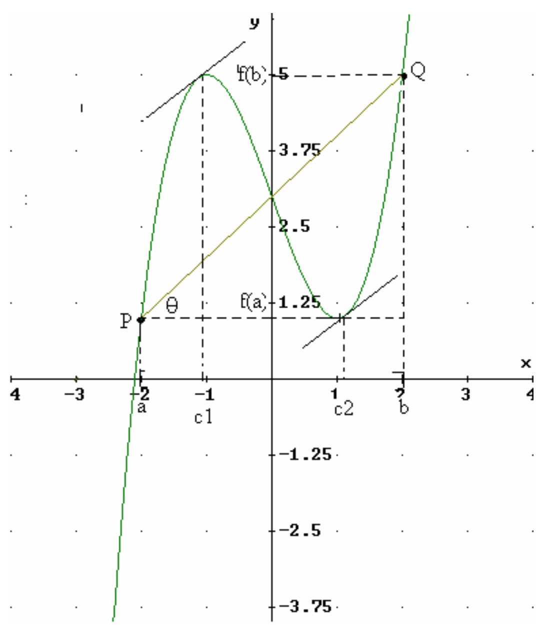
  $\mathbf{G(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\text{b - a}}}(b - a) = \mathbf{f(b) - f(a) - f(b) + f(a)} = 0$

  $\therefore \mathbf{G(a) = G(b)} = 0$

O sea G cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle, entonces existe **c** ε (a,b) tal que **G ’(c) = 0**

$$\therefore \mathbf{G'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\text{b - a}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\text{b - a}}}$$

Interpretación Geométrica



Tiene un significado geométrico fácil de recordar. Sea una curva $\mathcal{C}$ dada por y = f(x) la cual tiene una tangente en cada punto. Sea P y Q dos puntos sobre $\mathcal{C}$. Entonces existe un punto entre ellos donde la pendiente de la recta tangente es paralela a la recta secante que los conecta.

La pendiente de:

$$\overline{\mathbf{PQ}} = \mathbf{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \text{tag}\,\theta$$

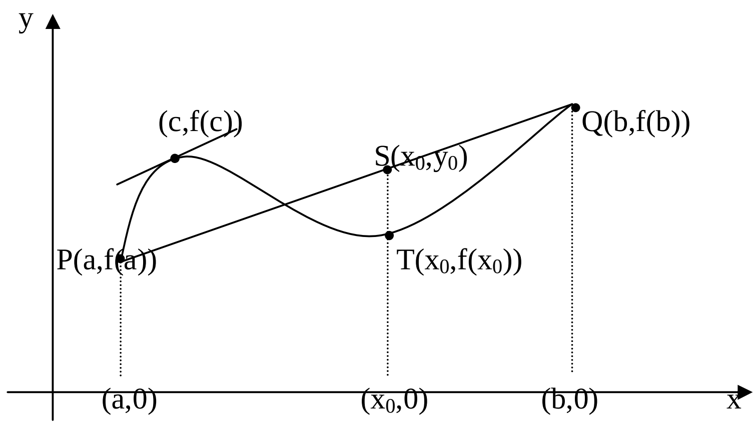
Decir que :

$$\mathbf{f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_2)}$$

significa que las rectas son paralelas. En el dibujo se muestra dos puntos **c** tales que en la recta tangente que pasa por esos puntos son paralelas a la recta secante que pasa por el punto P y Q.

Una observación útil de tener en cuenta es el significado geométrico de la función G(x) que se utilizó en la demostración del Teorema.

G(x) se puede interpretar geométricamente como sigue: Si x_0 es un punto de [a.b], entonces $G(x_0)$ es la longitud del segmento que une al punto $(x_0,f(x_0))$ de la gráfica de f con el punto (x_0,y_0) del segmento PQ. Vemos que $G(x_0)$ es la longitud del segmento ST.



6.2.- Distintos modos de expresar el Teorema del Valor Medio

El Teorema puede expresarse de varios modos totalmente equivalentes.

Ya que (b-a) ≠ 0 pues b ≠ a , entonces:

$$\mathbf{f(b) - f(a) = f'(c).(b - a) \quad (1)}$$

Además es claro, que el mismo teorema se aplica a cualquier intervalo cerrado [a,x]en el que f es continua y derivable en (a,x). De ese modo conseguiríamos:

$$\mathbf{f(x) = f(a) + (x - a).f'(c) \quad \text{con } a < c < b \quad (2)}$$

Ya que $a < c < b$, existe un número θ tal que:

$$\mathbf{c = a + \theta.(b - a) \qquad 0 < \theta < 1}$$

Pues si:

θ = 0 entonces c = a

θ = 1 entonces c = b

θ = ½ entonces c= ½(a+b)

y así podemos seguir asignando valores a θ para convencernos que la ecuación tiene sentido.

Si hacemos b – a = h, entonces b = a + h. Consecuentemente c = a + θ(a + h – a) .

Esto es:

$$\mathbf{c = a + \theta.h}$$

Así la ecuación **(1)** queda:

$$\mathbf{f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta.h) \ , \ \text{con } 0 < \theta < 1 \quad (3)}$$

Es decir si f es una función que satisface las condiciones del Teorema del Valor Medio, entonces existe un θ tal que $0 < \theta < 1$ para el cual es válido **(3)**

Esta última expresión se denomina " *fórmula de los incrementos finitos*". Vemos que hemos llegado a **(3)** como una consecuencia inmediata del Teorema del Valor Medio. De allí que también puede llevar el mismo nombre.

Ejemplo:

Aplicar el Teorema del valor medio si es posible a la función:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad \text{en } [-2,-1]$$

y calcular el valor de c.

Solución:

$f(-2) = (-2)^2 - 3.(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$

$f(-1)\ (-1)^2 - 3.(-1) + 2 = 1 + 4 + 2 = 6$

f es continua y derivable en toda la recta real, en particular será continua en [-2,-1] y derivable en (-2,-1). Entonces podemos aplicar el T.V.M a f. Entonces $\exists$ c ε (-2,-1) tal que:

$$\mathbf{f'(c)} = \frac{\mathbf{f(-1) - f(-2)}}{-1-(-2)} = \frac{-12+6}{-1} = -6$$

$$\mathbf{f'(x)} = 2\mathbf{x} - 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f'(c)} = 2\mathbf{c} - 3 \quad \Rightarrow \quad 2\mathbf{c} - 3 = -6 \qquad \therefore\ \mathbf{c} = -\frac{3}{2}$$

6.3.- Teoremas basados en el Teorema del Valor Medio

Teorema 1

Sean f y g dos funciones continuas sobre [a,b] y derivables sobre (a,b).

Si f '(x) = g'(x), con x un punto sobre (a,b), entonces existe un número real **k** tal que:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + k \qquad \forall\ x\ \varepsilon\ [a,b]}$$

Demostración:

Sea U la función dada por $U(x) = f(x) - g(x) \quad x\ \varepsilon\ [a,b]$

U es derivable sobre (a,b) y además:

$U'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ pues $f' = g'\ \forall\ x\ \varepsilon\ (a,b)$ (por hipótesis)

De modo que: $U'(x) = 0\ \ \forall\ x\ \varepsilon\ (a,b)$

Sea x cualquier número que satisfaga la expresión $a \leq x < b$. Vemos que U cumple las hipótesis del T.V.M. sobre [a,x]. De acuerdo a este teorema, existe un **c** ε (a,x) tal que:

$$\mathbf{U(x) - U(a) = U'(c).(x-a)}$$

Como $U'(c) = 0$, entonces: $\quad U(x) - U(a) = 0$

Por lo tanto, $f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$ cuando x ε [a,b]. O lo que es equivalente:

$$\mathbf{f(x) - g(x) = k \qquad \forall x\ \varepsilon\ [a,b]}$$

Teorema 2

Sea una función continua sobre [a,b] y derivable sobre (a,b). Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \; \varepsilon \; (a,b)$, entonces existe un número real **k** con la propiedad:

$$\mathbf{f(x) = k \quad \forall x \; \varepsilon \; [a,b]}$$

Demostración:

Si G es la función definida por $G(x) = 0 \;\; \forall x \;\; \varepsilon \; [a,b]$, entonces $G'(x) = 0$. Por hipótesis $f'(x) = 0$, entonces f y G satisfacen las hipótesis del **TEOREMA 1**. Por lo tanto:

$$\mathbf{f(x) = G(x) + k} \quad \text{o lo que es equivalente} \quad \mathbf{f(x) = k, \; \forall x \; \varepsilon \; [a,b]}$$

Definición

Sea la función $f = \{(x,y) \,/\, y = f(x),\, x \;\varepsilon\; X\}$

- Se dice que f es creciente sobre un intervalo $I \subset X$ si y solamente si,
  $\forall\, x_1, x_2 \;\varepsilon\; I,\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Se dice que f es decreciente sobre un intervalo $I \subset X$ si y solamente si,
  $\forall\, x_1, x_2 \;\varepsilon\; I,\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Teorema 3

Sea f derivable sobre (a,b) siendo $f'(x) > 0 \quad \forall x \;\varepsilon\; (a,b)$. Si x_1, x_2 son dos números reales tales que $a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Demostración:

Como f es derivable en (a,b) entonces f es continua en (a,b). Ya que $[x_1,x_2] \subset (a,b)$ entonces f satisface las condiciones del T.V.M sobre $[x_1,x_2]$. Por lo tanto $\exists$ **c** ε (x_1, x_2) tal que:

$$\mathbf{f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Entonces: $\mathbf{f'(c).(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)}$

Como **c** ε (a,b) entonces $\mathbf{f'(c)} > 0$ y además como $\mathbf{(x_1 - x_2)} > 0$.

Se sigue que: $\mathbf{f(x_2) - f(x_1)} > 0$ entonces $\mathbf{f(x_2) > f(x_1)}$

Teorema 4

Si f es derivable sobre (a,b) siendo $f'(x) < 0 \quad \forall x \;\varepsilon\; (a,b)$. Si x_1, x_2 son dos números reales tales que $a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Demostración: (Ejercicio para el lector)

Teorema 5

Si $f'(x) > 0$ sobre (a,b) entonces f es creciente sobre (a,b)

Demostración:

Sea $x_1 \wedge x_2 \;\varepsilon\; (a,b) \wedge x_1 < x_2$ entonces por el **TEOREMA 5** $f(x_1) < f(x_2)$. Esto dice que la función es creciente en (a,b)

Teorema 6

Si f ’(x) < 0 sobre (a,b) entonces f es decreciente sobre (a,b)

Demostración: (Ejercicio para el lector)

Observación:

El **TEOREMA 5** y **TEOREMA 6** dicen en otros términos:

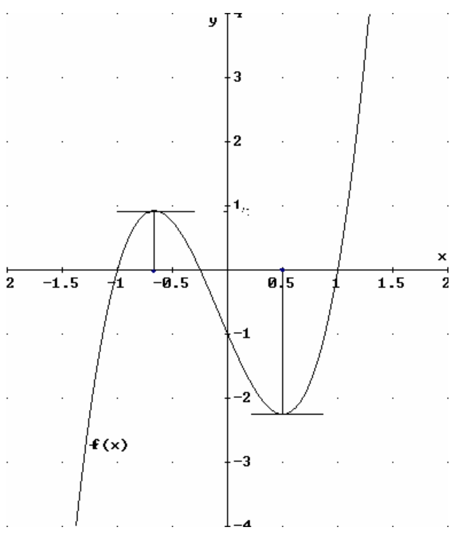
- Si la función f tiene derivada positiva en I, entonces f es creciente en I
- Si la función f tiene derivada negativa en I, entonces f es decreciente en I.

6.4.- Ejemplos de aplicación del Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio

1. *La función* $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$, *tiene por raíces a 1 y -1. Hallar la raíz de la derivada* $f'(x)$ *mediante el teorema de Rolle.*

Si bien en este ejercicio no nos dicen explícitamente el intervalo en el cual debemos realizar el análisis, intuitivamente nos damos cuenta que sí es una función continua por ser polinómica. Para anularse en x = 1 y x = -1, necesariamente entre estos valores existirá un *c* para el cual se cumplirá que $f'(c) = 0$. Entonces veremos si se cumplen las hipótesis del teorema en el intervalo [-1, 1]:

- f es continua en todo su dominio por ser polinómica, entonces también lo es en el intervalo [-1,1].
- f es derivable en todo su dominio por ser polinómica, entonces también lo es en el intervalo (-1,1), y su derivada vale $f'(x) = 12x^2 + 2x - 4$.
- Sabemos que f(1) = f(-1) = 0, por ser 1 y –1 raíces.



Como se cumplen todas las hipótesis, podemos afirmar por el teorema de Rolle, que existe por lo menos un *c* en el intervalo (-1,1), tal que:

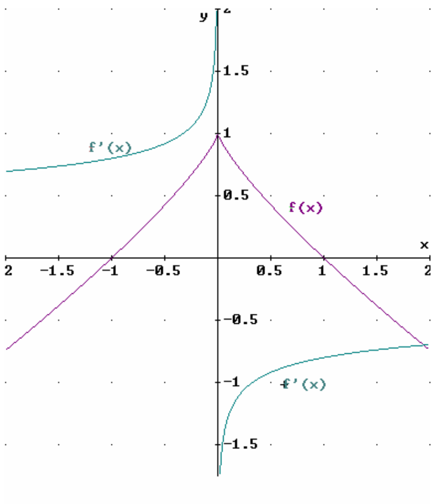
$$\mathbf{f'(c) = 0.}$$

El teorema solo asegura la existencia de al menos un c que cumpla con $\mathbf{f'(c) = 0}$. No nos dice nada de cómo encontrar el/los valores de ***c***. Vemos en el gráfico, que en la función de estudio se encontraron dos valores c_1 y c_2.
Lo cual muestra que el valor de ***c*** que corresponde al teorema no necesariamente es único.

2. *Encuentre una función en la cual cumpla con las hipótesis del Teorema de Rolle y la función derivada admita un número infinito de ceros en un determinado intervalo. Grafique la misma.*

3. *La función* $y = 1 - x^{4/5}$, *se anula en los extremos del segmento* [-1,1]. *¿ Puede saber mediante algún teorema si existe algún c perteneciente al intervalo* (-1,1), *tal que*

$f´(c) = 0$?. *Demuestre que la derivada de esta función no se reduce nunca a cero en ningún punto de ese intervalo.*



Vemos primero si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle:

- f es continua en todo su dominio, por lo tanto también lo es en [-1,1].
- Si encontramos f ´ obtenemos: $f´(x) = -(4/5)\, x^{-(1/5)}$, y esta expresión se indetermina en x = 0, que pertenece al intervalo (-1,1). Por lo tanto, la función no es derivable en dicho intervalo y no podemos aplicar el teorema. Esto quiere decir que podría o no existir un valor ***c*** tal que $f´(c) = 0$.Si observamos con cuidado la expresión de la derivada, vemos que esta nunca se anula, con lo que queda demostrado que la función derivada nunca se reduce a cero.

4. *¿ En qué punto de la curva* $y = x^n$ *la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos* M(0,0) *y* N(a, a^n)*?.*

 Como la función dada es de tipo polinómica , sabemos que es continua y derivable en todo punto. Podemos aplicar con total tranquilidad el teorema del valor medio en el intervalo (0,a). Es decir, queremos ver para que valor de *c* perteneciente a este intervalo la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto ($f´(c)$), coincide con la pendiente de la cuerda que une los puntos M y N. Reemplazando en la expresión dada por el teorema:

$$\mathbf{f'(c) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{(a^n - 0)}{a} = a^{n-1}}$$

$$\mathbf{n\, c^{\,n-1} = a^{\,n-1}}$$

De donde surge que $\mathbf{c = \dfrac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}}}$

6.5.-Generalización del Teorema del Valor Medio

Si en vez de tratar con una función, tratamos con dos, f y g, que cumplen las hipótesis del T.V.M. en [a,b], se nos puede ocurrir hacer lo siguiente:

f cumple el T.V.M en [a,b], entonces $\exists \mathbf{c_1 \varepsilon (a,b) / f(b) - f(a) = (b - a).f'(c_1)}$

g cumple el T.V.M en [a,b], entonces $\exists \mathbf{c_2 \varepsilon (a,b) / f(b) - f(a) = (b - a).f'(c_2)}$

Dividiendo miembro a miembro, ambas expresiones, se obtiene:

$\mathbf{\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c_1)}{f'(c_2)}}$ El teorema que veremos a continuación es más potente que la expresión dada, pues llega a un resultado similar pero para un único valor de **c**.

7.- TEOREMA DE CHAUCHY[3]

Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b), entonces existe un punto **c** de (a,b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración: (rápida y sencilla)

La función G(x) = f(x)[g(b)-g(a)] – g(x)[f(b)-f(a)] cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle en [a,b]. (Ejercicio para comprobar por el lector). Por lo tanto, existe un punto **c** ε (a,b) para el cual G'(x) = 0. Por lo tanto, se cumple:

$$f'(c)[g(b)-g(a)] - g'(c)[f(b)-f(a)] = 0$$

Despejando se obtiene que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Esta demostración es muy rápida. Sin embargo podemos acercarnos a una demostración que tiene la ventja de que permite ver, en cada momento, el porqué de cada paso.

Primera Aproximación

Sean ψ y ϕ dos funciones continuas en [a,b], derivables en (a,b) y que cumplen que: $\psi(a) = \phi(a)$ y además $\psi(b) = \phi(b)$. La función diferencia $H(x) = \psi(x) - \phi(x)$, cumple las hipótesis del Teorema de Rolle y por lo tanto, existe un punto **c** ε (a,b) para el cual H'(c) = 0. Es decir: $\psi'(c) - \phi'(c) = 0$; o bien $\psi'(c) = \phi'(c)$

La idea es sencilla: si las dos funciones parten del mismo punto y llegan al mismo punto, en algún lugar crecen igual deprisa.

"En cinemática significaría que si dos móviles pasan de un lugar a la misma hora y llegan a otro lugar también simultáneamente, es seguro que, en algún instante intermedio llegaron a la misma velocidad".

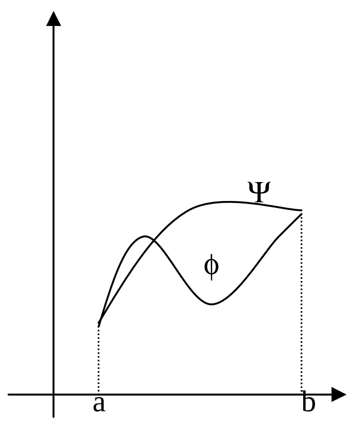
[3] Agustín – Louis Cauchy nació en Paris y se educó en la École Polytechnique. Debido a su débil salud, se le recomendó que se dedicara a la Matemática. Durante su carrera, practicó el profesorado en la École Polytechnique, la Sorbona y el College de France. Sus contribuciones matemáticas fueron brillantes y asombrosas por su cantidad. Su productividad fue tan copiosa que la Academia de Paris decidió limitar el número de trabajos de su orden del día con el objeto de hacer frente a la producción de Cauchy. Fue un devoto católico y un ferviente realista. Rehusó jurar obediencia al gobierno francés que tomó el poder en 1830, se exilió voluntariamente en Italia en diversas instituciones religiosas de París hasta que los votos de obediencia fueron abolidos después de la revolución de 1848. Cauchy tuvo variados intereses. Amaba la poesía y fue autor de una obra sobre prosodia hebrea. Sus convicciones religiosas le llevaron a patrocinar obras caritativas para madres solteras y criminales. Aunque el Cálculo fue descubierto a fines del siglo XVII, sus fundamentos permanecieron en estado de confusión y desorden hasta que Cauchy y sus contemporáneos (Gauss, Abel y Bolzano) impusieron normas de rigor. Debemos a Cauchy la idea de basar el Cálculo en una clara definición del concepto de límite. Todos los libros de texto modernos siguen al menos en esencia, la exposición de Cauchy para el Cálculo. El Teorema de Cauchy, de interés teórico, da paso a la regla de L'Hospital de extraordinaria utilidad para el cálculo de límites.

Segunda Aproximación

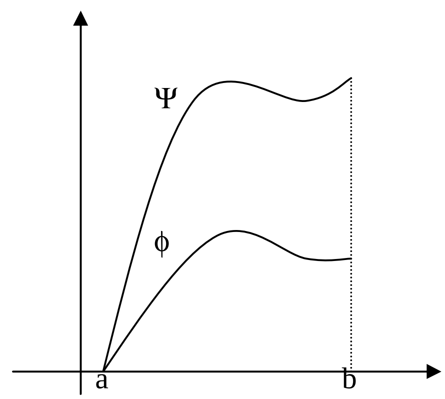
Sean ψ y ϕ dos funciones continuas en [a,b], derivables en (a,b) y que cumplen que: $\psi(a) = \phi(a) = 0$ y además $\psi(b) = 3\phi(b)$. La función diferencia: $H(x) = \psi(x) - 3\phi(x)$ cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle y por lo tanto existe un punto **c** ε (a,b) para el cual $H'(c) = 0$. Es decir: $\psi'(c) - 3\phi'(c) = 0$. De aquí se deduce que:

$$\psi'(c) = 3\phi'(c) \quad ; \quad \frac{\psi'(\mathbf{c})}{\phi'(\mathbf{c})} = 3 = \frac{\psi(b)}{\phi(\mathbf{b})}$$

Esto quiere decir que si ψ crece el triple que ϕ habrá algún momento en que la velocidad de crecimiento de ψ sea el triple de la de ϕ.



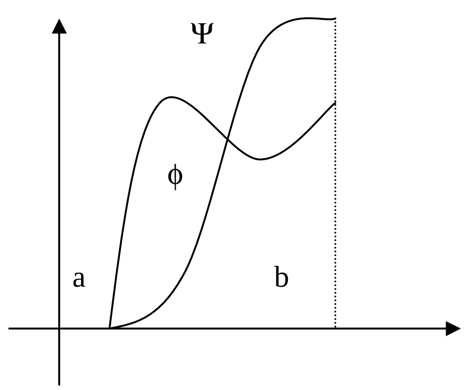
Primera Aproximación



Segunda Aproximación

Tercera aproximación

Si en la versión anterior suprimimos la condición impuesta de $\psi(b) = 3\phi(b)$, y dejamos que $\psi(b)$ y $\phi(b)$ estén en una relación cualquiera, razonando del mismo modo llegamos a que existe un **c** perteneciente al intervalo (a,b) tal que:



$$\frac{\psi'(\mathbf{c})}{\phi'(\mathbf{c})} = \frac{\psi(b)}{\phi(\mathbf{b})}$$

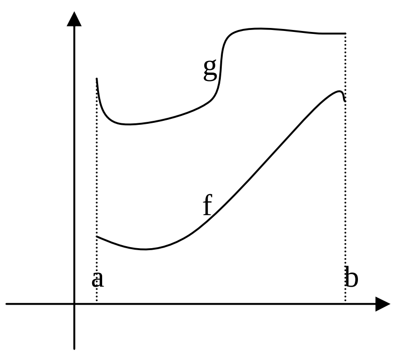
Versión Final

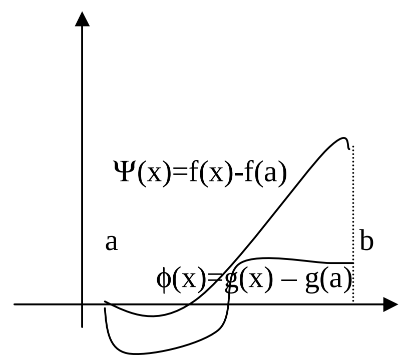
Sean f y g dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b). A partir de ellas obtenemos otras dos, ψ y ϕ. Las funciones ψ y ϕ cumplen las mismas condiciones de la ***Tercera Aproximación***. Por lo tanto existe **c** perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\frac{\psi'(\mathbf{c})}{\phi'(\mathbf{c})} = \frac{\psi(b)}{\phi(\mathbf{b})}$$

Sustituyendo ψ y ϕ por sus expresiones en función de f y g se tiene:

$$\frac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{g(b)-g(a)}} = \frac{\mathbf{f'(c)}}{\mathbf{g'(c)}}$$





Ejemplo:

Verificar que las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 5$ y $g(x) = x^3 - 5^2 + 15x - 3$ satisfacen el Teorema de Cauchy y hallar el punto c perteneciente al intervalo (-1,1).

Solución:

Como f y g son polinomios, ambas son continuas y derivables en toda la recta real, en particular lo serán continuas en [-1,1] y derivables en (-1,1).

Además: $f'(x) = 2x - 3$ y $g'(x) = 3x^2 - 10x + 15$

Por lo tanto: $f'(c) = 2c - 3$ y $g'(c) = 3c^2 - 10c + 15$

Aplicando el Teorema de Cauchy, debemos encontrar: f(1); f(-1); g(1); g(-1). Así:

$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$

$f(-1) = 1 + 3 + 5 = 9$

$g(1) = 1 - 5 + 15 - 3 = 8$

$g(-1) = -1 - 5 - 15 - 3 = -24$ Entonces: $\dfrac{2\mathbf{c} - 3}{3\mathbf{c}^2 - 10\mathbf{c} + 15} = \dfrac{9-3}{-24-8} = -\dfrac{3}{16}$

Por lo tanto realizando las operaciones correspondientes, llegamos a la expresión:

$9c^2 + 2c - 3 = 0$, y resolviendo la ecuación cuadrática en **c** encontramos los valores de **c**, que en este caso son dos: $\mathbf{c}_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{9}$

Como $c_1 \cong 0.46$ y $c_2 \cong -0.68$ ambos pertenecen al intervalo (-1,1)

8.- REGLA DE L'HOSPITAL[4]

8.1.- Teoremas acerca de la regla de l'hospital

Teorema 1

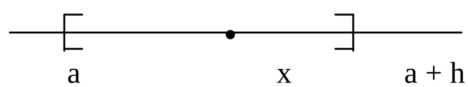
Sean las funciones $F = \{(x, y)/\ y = F(x),\ x \varepsilon D_1\}$ y $G = \{(x, y)/\ y = G(x),\ x \varepsilon D_2\}$

Continuas en el intervalo $[a, a + h] \subseteq D_1 \cap D_2$ para un número positivo h y derivables en $(a, a + h)$ con $G'(x) \neq 0$ para $x \varepsilon (a, a + h)$. Si $F(a) = 0$, $G(a) = 0$ y si :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = L$$

El teorema dice que:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$



Demostración:

Las funciones F y G satisfacen las hipótesis de la generalización del T.V.M (Teorema de Cauchy). Por lo tanto $\exists\ z\ \varepsilon\ (a,x)$ tal que:

---

[4] La renombrada regla de L'Hospital fue publicada por primera vez por el noble francés marqués L'Hospital en su libro ANALYSE DES INFINIMENT PETITS, publicado en París en 1696. Cuado se dio por vencido y aceptó que no podía entender los nuevos conceptos por si mismo, contrató como su profesor al brillante matemático y físico suizo Juan Bernoulli, uno de los miembros de una gran familia de matemáticos. Al parecer en 1696 el libro de L'Hospital, este reconoció su deuda con Leibniz y Bernoulli, pero solo en términos generales. A través de los años se convirtió en un misterio el hecho de la deuda real del marqués con el matemático suizo. Este último, cuando el noble francés le envió una copia de su libro, se lo agradeció y lo elogió, pero más tarde, en algunas cartas privadas escritas en vida de L'Hospital, él afirmaba ser autor de mucho de lo escrito en el mismo. En 1704, ya fallecido el marqués, Bernoulli reclamó como propia la famosa regla para el caso 0/0. Cuando en 1922 se publicó un manuscrito de Bernoulli sobre el cálculo diferencial, que databa entre 1691/92, si se comparan las notas del texto de Bernoulli con las de L'Hospital, se observa que existen numerosas coincidencias, por lo que parecería que quien originó las ideas que el marqués expone fue Bernoulli. Pero la verdadera situación se dio a conocer en 1955 cuando la correspondencia más antigua de este última fue dada a conocer (actualmente se encuentra en Estocolmo). En ella consta que en 1694 se llevó a cabo un arreglo comercial entere ambos matemáticos, por el cual L'Hospital le ofreció una cierta cantidad de dinero a su futuro tutor, prometiendo incrementarla, siempre que aceptara tres condiciones: a) trabajar en todos los problemas matemáticos que le enviara el marqués, b) comunicarle cada uno de los resultados obtenidos y c) no transmitirle ninguno de ellos a otros estudiosos entre los que especifica a Varignon. Se sabe que Bernoulli aceptó la propuesta, debido a su situación económica muy mala. Lo que también se sabe es que las finanzas de Bernoulli se incrementaron en gran medida, mientras que las de L'Hospital casi desaparecieron.

Una reflexión a tener en cuenta es la siguiente: Los nombres relacionados con descubrimientos matemáticos, pertenecen a menudo a personas que se encargaron a dar a conocer estos resultados o los estudios que realizaron ellos mismos para poder interpretarlos. Por esto, permitamos seguir llamando como hasta ahora a la regala con el nombre del marqués, después de todo el pagó por ese derecho y se merece alguna fama por el interés que mostró en el tema. Su libro sobre el nuevo Cálculo, fue no solo el primero en ser publicado, sino que contiene contribuciones propias y fue suficientemente bueno para mantener su posición prominente por medio siglo y más.

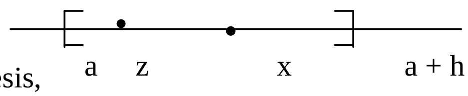
$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

Como por hipótesis F(a) = 0 = G(a) se tiene:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

Y por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)}$$



Ahora, por hipótesis,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = L$$

Además: $a < z < x$, por lo tanto vemos que :

$\lim_{x \to a^+} z = a$ Pues cuando x tiende al valor “a”, resulta que z tiende tambien a ese valor

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \to a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = L$$

Y en consecuencia:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Teorema 2

Sean las funciones $F = \{(x, y)/\ y = F(x),\ x\ \varepsilon\ D_1\}$ y $G = \{(x, y)/\ y = G(x),\ x\ \varepsilon\ D_2\}$
Continuas en el intervalo $[a - h, a] \subseteq D_1 \cap D_2$ para un número positivo h y derivables en (a - h, a) con $G'(x) \neq 0$ para $x\ \varepsilon\ (a - h, a)$. Si F(a) = 0, G(a) = 0 y si :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a^-} \frac{F(x)}{G(x)} = L$$

La demostración de este teorema es semejante al anterior. Por lo tanto queda como ejercicio para el lector.

Teorema 3

Sean las funciones F = {(x, y)/ y = F(x), x ε D_1} y G = {(x, y)/ y = G(x), x ε D_2} continuas en el intervalo [a – h, a + h] $\subseteq D_1 \cap D_2$ para un número positivo h y derivables en (a - h, a + h) con G'(x) ≠ 0 para x ε (a – h , a) ∪ (a, a +h) . Si F(a) = 0, G(a) = 0 y si :

$$\lim_{x\to a^-}\frac{F'(x)}{G'(x)}=L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^-}\frac{F(x)}{G(x)}=L$$

Demostración:

Ya que

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=L$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{F(x)}{G(x)}=L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)}=L$$

Entonces: $$\lim_{x\to a^-}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

Por lo tanto por el **TEOREMA 1** y **TEOREMA 2** obtenemos:

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=L$$

Ejemplo:

Encuentre $\lim_{x\to 0}\frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$

F(x) = tg (x) – x D1 = (-π/2, 0) ∪ (0, π/2)
G(x) x – sen(x) D2 = **R**

Por lo tanto D1 ∩ D2 = (-π/2, 0) ∪ (0, π/2)

F(0) = tg(0) – 0 = 0
G(0) = 0 – sen(0) = 0
F'(x) = sec^2(x) – 1
G'(x) = 1 – cos(x)
Entonces aplicando la Regla de L'Hospital nos queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sec^2(x)-1}{1-cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2(x)}-1}{1-cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos^2(x)}}{\mathbf{cos^2(x)(1-cos(x)}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{(1-cos(x)).(1+cos(x))}}{\mathbf{cos^2(x)(1-cos(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{(1+cos(x))}}{\mathbf{cos^2(x)}}=2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{tg(x) - x}}{\mathbf{x - sen(x)}} = 2$$

Teorema 4

Sean las funciones F = {(x, y)/ y = F(x), x ε D_1} y G = {(x, y)/ y = G(x), x ε D_2} dos funciones con a ε $D_1 \cap D_2$ para las cuales $F^{(k-1)}$ y $G^{(k-1)}$ son continuas en [a – h, a + h] , si se cumple que h > 0 y además $F^{(k)}$ y $G^{(k)}$ existen en el mismo intervalo, siendo la función $G^{(k)}(x) \neq 0$ en (a – h , a) ∪ (a, a +h) .

Si F(a) =F'(a) = F''(a) =..... $F^{(k-1)} = 0$ y G(a) =G'(a) = G''(a) =.... $G^{(k-1)} = 0$ y

$$\lim_{x\to a^-}\frac{F^{(k)}(x)}{G^{(k)}(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^-}\frac{F(x)}{G(x)} = L$$

La demostración simplemente es aplicar reiteradas veces el **TEOREMA 3.**

Es muy importante tener presente que estos teoremas solamente se pueden aplicar para calcular: $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$ cuando **F(a) = 0** y **G(a) = 0**

Observaciones

La regla de L'Hospital es válida con la misma restricción del Teorema de Cauchy y además si:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}$ no existe, nada se puede asegurar respecto del $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$

Para visualizar lo enunciado, basta ver un ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}}{sen(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}x.sen\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}\lim_{x\to 0}x.sen\frac{1}{x} = 1.0 = 0$$

Pero si analizamos el cociente de sus derivadas:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x.sen\frac{1}{x} - x^2.cos\frac{1}{x}.\frac{1}{x^2}}{cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x.sen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}}{cos(x)}$ este límite no existe, pues $\lim\limits_{x\to 0}\left(cos\frac{1}{x}\right)$ no existe

Ejemplos:

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x) - x}{3x^2} = L$

   Aplicando la regla de L'Hospital tenemos:

$$\mathbf{L} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\mathbf{x}} - 1}{6\mathbf{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}}}{6\mathbf{x}} = \lim_{x\to 0} - \frac{\mathbf{x}}{(1+\mathbf{x})6\mathbf{x}} = -\frac{1}{6}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{3\mathbf{x}^2} = -\frac{1}{6}$$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sen(x)} - \mathbf{x}}{2\mathbf{x}^3} = \mathbf{L}$

Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\mathbf{x}) - 1}{6\mathbf{x}^2} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar la regla y nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\mathbf{sen(x)}}{12\mathbf{x}} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{12}\right) \frac{\mathbf{sen(x)}}{\mathbf{x}} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sen(x)} - \mathbf{x}}{2\mathbf{x}^3} = -\frac{1}{12}$$

8.2.- Generalizaciones

8.2.1.- Primer caso

La variable x en vez de tender a un número cualquiera tiende a infinito. Esto es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$$

Si hacemos: **x = 1/t** entonces **t = 1/x**, entonces cuando **x** tienda a infinito, la variable **t** tenderá a cero.

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{f(1/t)}}{\mathbf{g(1/t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{f'(1/t)}\left(-\frac{1}{\mathbf{t}^2}\right)}{\mathbf{g'(1/t)}\left(-\frac{1}{\mathbf{t}^2}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{f'(1/t)}}{\mathbf{g'(1/t)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{g'(x)}}$$

8.2.2.- Segundo caso

La indeterminación es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, ya sea que la variable **x** tienda a un número cualquiera **a** o bien tienda a infinito.

Esto es: $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ siendo $\displaystyle \lim_{x\to a} \mathbf{f(x)} = \infty = \lim_{x\to a} \mathbf{g(x)}$

En este caso, el problema se resuelve transformando la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en la forma $\frac{0}{0}$. Esto lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Pues:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$ y si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

8.3.-Distintas formas de indeterminación

8.3.1.-Forma (0.∞)

$\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

Como: $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$

Así:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=\lim_{x\to a} f(x).\frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to a} f(x).g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}g(x)$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} x.\cot g(x)=\lim_{x\to a} x\frac{1}{\frac{1}{\cot g(x)}}=\lim_{x\to 0} x.\frac{1}{tg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}}=\lim_{x\to 0}\cos^2(x)=1$$

8.3.2.- Forma (∞ - ∞)

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

Escribimos la diferencia de otro modo:

$$f-g=\frac{f-g}{f.g}f.g=\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right).f.g=\frac{\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)}{\frac{1}{f.g}}$$

Lo que hicimos es transformarla en la forma $\frac{0}{0}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x.\cos(x)}{x.\operatorname{sen}(x)}$$

Aplicamos L'Hospital y nos queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1.\cos(x)+x.\operatorname{sen}(x)}{1.\operatorname{sen}(x)+x.\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)+x.\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)+x.\cos(x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}+\cos(x)}=0$$

8.3.3.- Formas Exponenciales: (∞^0) ; (0^0) ; (1^∞)

Queremos ver los casos posibles de indeterminación de una expresión $\mathbf{f(x)^{g(x)}}$.
Tenemos que calcular:

$L=\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ Aplicamos ln en ambos miembros y así resulta:

$$\ln L=\lim_{x\to a}\left(\ln(f(x))^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}(g(x).\ln f(x)) \Rightarrow \ln L=A \quad \therefore \quad L=e^A$$

Ejemplos:

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to a}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ Forma ∞^0. Aplicando lo expresado precedentemente tenemos:

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}.\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0 \Rightarrow \ln L=0 \quad \therefore \quad L=e^0=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

2. $\lim_{x\to 0}(x)^x=L$ Forma 0^0

$$\ln L=\lim_{x\to 0}x.\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^2}{x}=0 \Rightarrow \ln L=0 \quad \therefore \quad L=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0}(x)^x=1$$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg(x))^{tg(2x)}=L$ Forma 1^∞

$$\ln L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg 2x).\ln(tg(x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(tg(x))}{\cot g(2x)}$$

Aplicando L'Hospital tenemos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{1}{\mathbf{tg(x)}\dfrac{1}{\cos^2(x)}}}{-\dfrac{1.2}{\mathbf{sen}^2(2x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\dfrac{\cos(x)}{\mathbf{sen(x)}}\dfrac{1}{\cos^2(x)}}{-\dfrac{2}{\mathbf{sen}^2(2x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{\mathbf{sen}^2(2x)}{2.\mathbf{sen(x)}.\cos(x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{(2\mathbf{sen(x)}.\cos(x))^2}{2\mathrm{sen}(x).\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2\mathbf{sen(x)}.\cos(x) = -1$$

$$\Rightarrow \ln L = -1 \qquad \therefore \qquad L = e^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{1}{e}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\mathbf{tg(x)})^{\mathbf{tg(2x)}} = \frac{1}{e}$$

8.4.- Ejemplos de L'Hospital

❖ **Forma** $\frac{0}{0}$

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\mathrm{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \mathrm{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 x)(1+\cos x)}{\mathrm{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}^2 x)(1+\cos x)}{(\cos^2 x)(\mathrm{sen}^2 x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)}{\cos^2 x} = 2$$

❖ **Forma** $\frac{\infty}{\infty}$

1. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = 2$

2. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{\tan \pi x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\dfrac{-2}{1-2x}}{\pi \sec^2(\pi x)} = -\left(\frac{2}{\pi}\right) \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos^2(\pi x)}{1-2x} =$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2\cos(\pi x)\mathrm{sen}(\pi x)}{-2} = 0$$

❖ **Forma** 1^{∞}

1. $$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x+e^{2x}) = \ln(L) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}} = 3 \Rightarrow L = e^{3}$$

2. $$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln x\ln(1+x) = \ln(L) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{(\ln x)^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\ln x)^2}{1+x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}+1} =$$

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = -2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0^+}x = 0 \Rightarrow L = e^{0} = 1$$

❖ **Forma** 0^{∞}

1. $$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)^{\ln x} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\ln x)(\ln(\operatorname{sen}x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\ln x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\operatorname{sen}x} = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\cos x\right) = 1 \Rightarrow L = e$$

2. $$\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{1/x-1} = L \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln(\ln x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x\ln x} = \infty \Rightarrow L = e^{\infty} = \infty$$

❖ **Forma** 0^{0}

1. $$\lim_{x\to 0^+}x^{\operatorname{sen}x} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)(\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(\operatorname{sen}x)^{-1}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-(\operatorname{sen}x)^{-2}\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = 0 \Rightarrow L = e^{0} = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tag}(x)^{\operatorname{sen}x} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)(\ln(\operatorname{tag}(x))) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{tag}(x))}{(\operatorname{sen}x)^{-1}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tag}(x)}\right)}{-(\operatorname{sen}x)^{-2}\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x.\sec^2 x}{\operatorname{tag}(x).\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tag}^2(x)}{\operatorname{tag}(x).\cos x} = 0 \Rightarrow L = e^{0} = 1$$

❖ **Forma ∞^0**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{2/x} = L \Rightarrow 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\right)}{1} =$

$2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+x} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} =$

$2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1+e^{-x})} = 2 \Rightarrow L = e^2$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

❖ **Forma $\infty-\infty$**

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5}{x^2+x-6}-\dfrac{1}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{5}{(x-2)(x+3)}-\dfrac{1}{x-2} =$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5-(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{2x+1} = -\dfrac{1}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-\cancel{1/x}}{\left(\cancel{1/x}\right)(x-1)+\ln x} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\ln x} =$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$

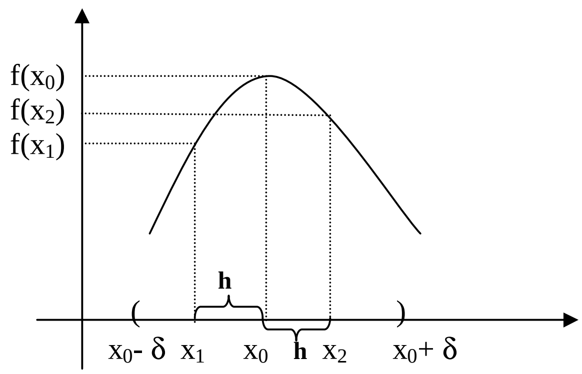
9.- MÁXIMOS Y MINIMOS

9.1.- Definición de Máximo y Mínimo Relativo

Sea $X \subseteq \Re$. Sea f = { (x, y) | y = f(x), $x\in X$}, donde X es un intervalo o unión de intervalos.

Definición

f tiene máximo relativo en $x = x_0$, $x\in X$ sii $\exists\ \delta$: $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\ x \in \aleph_\delta(x_0)$.



Podemos expresar cualquier punto genérico $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, que lo podemos llamar por ejemplo como en la gráfica $x = x_1$ ó $x = x_2$. Así:

$x = x_0 - h$, $\qquad h \in (x_0 - \delta, x_0)$

$x = x_0 + h$, $\qquad h \in (x_0, x_0 + \delta)$

La condición se expresa entonces:

$f(x_0) \geq f(x_0 + h)$, $\qquad h \in (x_0, x_0 + \delta)$

$f(x_0) \geq f(x_0 - h)$, $\qquad h \in (x_0 - \delta, x_0)$

Juntando ambas condiciones:

- f tiene un *máximo relativo* en $x = x_0$, $x \in X$ sii $\exists\, \delta > 0$:

  $f(x) - f(x_0) = \Delta y \leq 0$, $\qquad \forall\ x \in \aleph_\delta (x_0)$.

Definición

- f tiene un *máximo absoluto* en $x = x_0$, $x \in X$ sii $f(x_0) \geq f(x)$, $\quad \forall\ x \in \aleph_\delta (x_0)$.

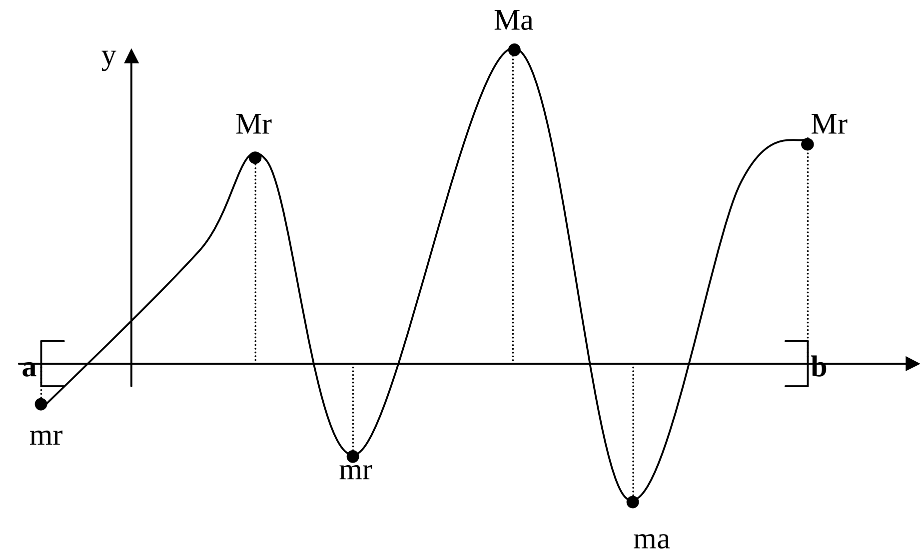
Análogamente:

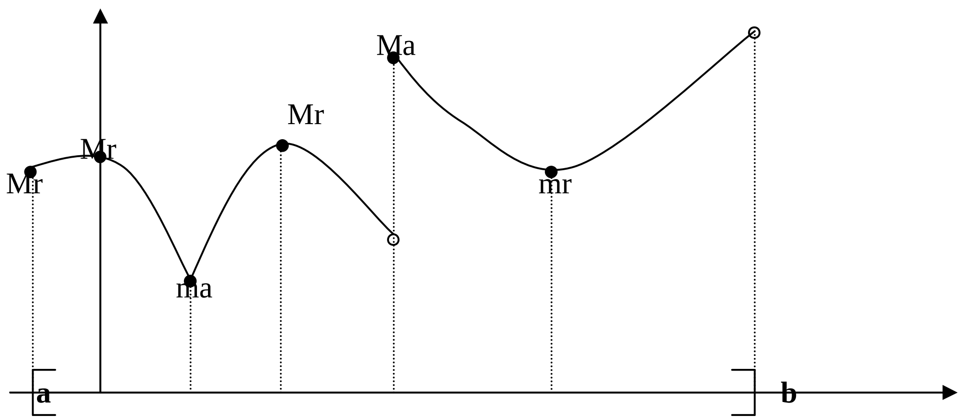
- f tiene un *mínimo relativo* en $x = x_0$, $x \in X$ sii $\exists\, \delta > 0$:

$f(x) - f(x_0) = \Delta y \geq 0$, $\qquad \forall\ x \in \aleph_\delta (x_0)$.

- f tiene un *mínimo absoluto* en $x = x_0$, $x \in X$ sii $f(x_0) \leq f(x)$, $\quad \forall\ x \in \aleph_\delta (x_0)$.

Ejemplos:





9.2.- Teorema: Condición necesaria de extremos

Sea $x_0 \in D_f$, si f (x_0) es un extremo relativo de f (x), entonces $f'(x_0) = 0 \;\vee\; f'(x_0)$ no existe.

Otra forma de expresarlo:

Si f tiene extremo en f (x_0) y $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración:

$\exists\ \delta > 0: \quad \Delta y \leq 0 \quad \forall\ x \in \aleph_\delta\ (x_0)$

$\therefore f(x_0 + h) - f\ (x_0) \leq 0 \quad \forall\ x \in \aleph_\delta\ (x_0)$.

Así, si $h > 0$, $h \in (x_0, x_0 + \delta)$, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\therefore f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Análogamente:

si $h < 0$, $h \in (x_0 - \delta, x_0)$, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$, $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$\therefore f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Por lo tanto

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

Entonces

$$f'(x_0) = 0$$

Vemos que la condición **NO** es suficiente. Analicemos el siguiente contraejemplo:

$f\ (x) = x^3$, $D_f = \Re$

$f\,'(x) = 3x^2 \Rightarrow f\,'(x) > 0$, $\forall\ x \in D_f \Rightarrow$ f es creciente en todo su dominio $\therefore$ **no tiene máximo.**
Sin embargo, $3x^2 = 0$ si $x = 0$, es decir $f\,'(x) = 0$ en $x = 0$.
Este es un ejemplo en el cual la derivada se anula y no hay extremo.

Un valor extremo de f puede presentarse:

- en un punto terminal de su dominio.
- En un punto interior donde la derivada no existe o es nula.

Definición

En una función f cuyo dominio es un intervalo I, $x_0 \in I$ es *punto crítico* si:

- $f\,'(x_0) = 0$ ó
- $f\,'(x_0)$ no existe (porque f no es continua o porque las derivadas laterales son distintas) ó

- ❖ x_0 es extremo de I ($x_0 \in$ I), donde se pueden dar los casos:
  - I = [a, b], donde a y b son puntos críticos.
  - I = [a, b), donde a es punto crítico y b no.
  - I = (a, b], donde b es punto crítico y a no.
  - I = (a, b), donde ni a ni b son puntos críticos.
  - I = [b,∞) o (-∞, a], donde a y b son puntos críticos.

En el caso anterior en la función $f(x) = x^3$, $x = 0$ es un punto crítico pues es el primer caso .

Esto nos dice que: **Un punto crítico puede o no ser extremo**.

9.3.- Condición suficiente para la existencia de extremos.

Teorema

Sea f continua en I y si x_0 es un punto interior de I tal que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe y

i) $\exists\, \delta > 0$: $f'(x) > 0 \quad \forall x: \quad x_0 - \delta < x < x_0$

$f'(x) < 0 \quad \forall x: \quad x_0 < x < x_0 + \delta$

Entonces $f(x_0)$ es *máximo relativo* de $f(x)$.

ii) $\exists\, \delta > 0$: $f'(x) < 0 \quad \forall x: \quad x_0 - \delta < x < x_0$

$f'(x) > 0 \quad \forall x: \quad x_0 < x < x_0 + \delta$

Entonces $f(x_0)$ es *mínimo relativo* de $f(x)$.

iii) signo($f'(x)$) = cte. $\quad \forall x \in \aleph_\delta(x_0)$.

Entonces $f(x_0)$ no es *máximo ni mínimo* de $f(x)$.

Demostración

i) Por hipótesis $\exists\, \delta$:

$f'(x) > 0 \qquad \forall x: x_0 - \delta < x < x_0$ entonces
f crece en $(x_0 - \delta, x_0)$ $\Leftrightarrow$ (por def. de func. creciente)

$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$

$\therefore \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **(1)**

De igual forma :

$f'(x) < 0 \quad \forall x: \ x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces
f decrece en $(x_0, x_0 + \delta) \Leftrightarrow$ (por def. de func. decreciente)

$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$\therefore \ f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **(2)**

De **(1)** y **(2)**, $\exists \delta$: $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \aleph_\delta(x_0)$

Esto dice que f tiene un *máximo relativo* en $x = x_0$.

ii) Queda como ejercicio para el lector.
iii) Si signo$(f'(x))$ = cte. $\forall x \in \aleph_\delta(x_0)$ podemos suponer que

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \aleph_\delta(x_0) \Rightarrow$ f crece en $\aleph_\delta(x_0)$

Por lo tanto:

- f crece en $(x_0 - \delta, x_0)$, entonces

$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

$\therefore \ f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **(1)**

- f crece en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces

$x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

$\therefore \ f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **(2)**

Vemos que **(1)** y **(2)** contradicen la definición de extremo, por lo tanto este no existe.

Este teorema se conoce como *Prueba de la primera derivada*.

Nota: el teorema se puede aplicar cuando:

- la derivada primera existe.
- La derivada primera no existe porque las laterales existen y son distintas.
- **NO** se puede aplicar cuando la no existencia de la derivada primera está dada porque la función no es continua o la no existencia de las laterales por ser oscilantes. En este caso debemos acudir a la definición.

Un ejemplo de este último caso es:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x+1 & x \geq 2 \\ -x+3 & x < 2 \end{array} \right\}$$

Si analizamos las condiciones de continuidad vemos que no se cumple la existencia del límite:

1. f (2) = 5
2. $\lim_{x\to 2^+}(2x+1)=5 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 2^-}(-x+3)=1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

$\therefore$ f no es continua en x = 2.

De acuerdo a la condición de existencia de extremos, al no existir la derivada en x = 2, este es un punto crítico.

Si para analizarlo utilizáramos la prueba de la primera derivada, encontramos primero la expresión de la derivada de primer orden, quedando:

$f'(x) = \begin{Bmatrix} 2 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{Bmatrix}$ Entonces vemos que $f'_+(2) = 2 > 0 \quad \wedge \quad f'_-(2) = -1 < 0$

De acuerdo a esto en x = 2 tenemos un mínimo.

Sin embargo, si hacemos el mismo análisis pero aplicando la definición, encontramos que:

$$\Delta y^+ = f(2+\Delta x) - f(2) = [2(2+\Delta x)+1] - 5 = 2\Delta x > 0$$

$$\Delta y^- = f(2-\Delta x) - f(2) = [-(2-\Delta x)+3] - 5 = \Delta x - 4 < 0$$

Por lo tanto, en x = 2 **no hay máximo ni mínimo**.

Otro ejemplo: $f(x) = |1 - x^2|$ en [-2, 2]

$f'(x) = sg(1-x^2).(-2x) = \pm(-2x)$.

Los puntos críticos serán:

- donde $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ que es punto crítico por ser punto interior del intervalo analizado.
- donde no existe $f'(x)$. Como la función que tenemos es $f(x) = |1 - x^2|$, sabemos que no es derivable donde $1 - x^2 = 0$, entonces x = 1 y x = -1 son también puntos críticos.
- En los extremos del intervalo, x = 2 y x = -2.

Así, el conjunto de puntos críticos es: $P_c = \{ 0, 1, -1, 2, -2\}$

Analizamos entonces cada punto crítico:

❖ En x = 0

$f'(0) = sg(1).(0) = +0$

$f'(0 + h) = sg(1- (0 + h)^2). (-2h)$, $0 < h < 1 \Rightarrow 0 < h^2 < 1$, por lo tanto

$f'(0 + h) = sg(1- h^2). (-2h) = (+)(-2h) = -2h$, $h > 0$

$f'(0-h) = sg(1 - (0 - h)^2).(-2.(0 - h))$, $0 < h < 1 \Rightarrow -1 < -h < 0 \Rightarrow 0 < (-h)^2 < 1$

$f'(0-h) = sg(1-h^2),2.-h = (+).2.(-h) = 2h,\ \ h > 0$

Entonces:

$f'(0+h) < 0$ y $f'(0-h) > 0 \Rightarrow$ En P(0,1) la función alcanza un Máximo

- En $x = 1$

$f\,'(1 + h) = sg\,(1- (1 + h)^2).\ (-2(1+h))$

$f\,'(1 - h) = sg\,(1- (1 - h)^2).\ (-2(1-h))$

Como:

$h > 0,\ (1+h) > 1 \Rightarrow (1+h)^2 > 1 \Rightarrow\ (1-(1+h)^2 < 0$

Así:

$f\,'(1+h) = (-).(-2(1+h) > 0,\ \ h > 0$

Además si $h < 0$, $0 < (1-h) < 1 \Rightarrow (1-h)^2 < 1$.
Como $0 < h < 1 \Rightarrow 0 > -h > -1 \Rightarrow 1 > 1 – h > 0$

Entonces:

$f\,'(1-h) = (+).\ (-2.(1-h)) < 0$

Por lo tanto:

$f\,'(1-h)\ < 0$ y $f\,'(1+h) > 0$. Entonces en el punto Q(1,0) la función alcanza un mínimo.

- En $x_0 = -1$

$f\,'(-1+h) = sg(1-(-1+h)^2).(-2).(-1+h)$

$f\,'(-1-h) = sg(1-(-1-h)^2).(-2).(-1-h)$

Sea $0 < h < 1$ entonces $–1 < (-1 + h) < 0$, por lo tanto, $1 > (-1 + h)^2$. De ese modo quedará: $1 – (-1(-1+h)^2 > 0$

Así:

$f\,'(-1+h) =(+).(-).(-2).(-1+h) > 0$ entonces $f\,'(-1+h)\ > 0$

Ahora: $0 < h < 1$ entonces $(-1 –h) < -1 < 0$, por lo tanto, $1< (-1 - h)^2$. De ese modo quedará: $-1(-1-h)^2 < 0$. Y de allí que concluimos que:

$f\,'(-1-h) =(-).(-).(-2).(-1-h) < 0$ entonces $f\,'(-1-h)\ < 0$

Por lo tanto:

f ’(-1-h) < 0 y f ’(-1+h) > 0. Entonces en el punto R(-1,0) la función alcanza un mínimo.

Sugerencia:

Podríamos haber analizado estos puntos por definición.

Veamos esto para el punto $x_0 = 1$

$\Delta y = f(-1+h) – f(-1)$

$\Delta y = |1-(h-1)^2| - |0| = |1-(h^2-2h+1)| -0 = |1-h^2+2h-1| = |-h^2+2h| > 0 \ \forall\ h\ \varepsilon\ \aleph_\delta(-1)$

$\therefore$ en el el punto de coordenadas (-1,0) la función alcanza un m´nimo.

Veamos que ocurre en los puntos $x_0 = 2$ y $x_0 = -2$.
En estos puntos la función no es derivable ya que la función no está definida para aquellos $x > 2$ o sea $f\,'_+{}^{(2)}$ no existe. Análogamente para $x < -2$, la derivada por la izquierda no existe.

- En $x_0 = 2$

Aplicamos la definición:

$\Delta y = f(2 – h) – f(2) = |1-(2-h)^2| - |1-4|$

Analizamos la variabilidad de h:

$0 < h <1 \Rightarrow -1 < -h < 0 \therefore -1+2 < 2 - h < 2 \Rightarrow 1 < 2\ h < 2 \therefore 1 < /2 – h)^2 < 4$

$\Rightarrow -1 > - (2-h)^2 > -4$. Es decir: $0 > 1 – (2 – h)+2+ > -3 \therefore -3 < 1 – (2 – h)^2 < 0$.

Así: $-3 < 1 – (2 –h)^2 \ \Rightarrow\ |1-(2-h)^2| = -1+ (2-h)^2$, y en consecuencia:

$\Delta y = -1+ (2-h)^2-3 = -4 + (2-h)^2 < 0$, como $(2-h)^2 < 4 \Rightarrow -4 + (2-h)^2 < 0$

$\therefore \Delta y < 0 \Rightarrow$ en el punto S(2,4) la función alcanza un máximo.

- En $x_0 = -2$

$\Delta y = f(-2+ h) – f(-2) = |1-(-2+h)^2| - |1-4|$

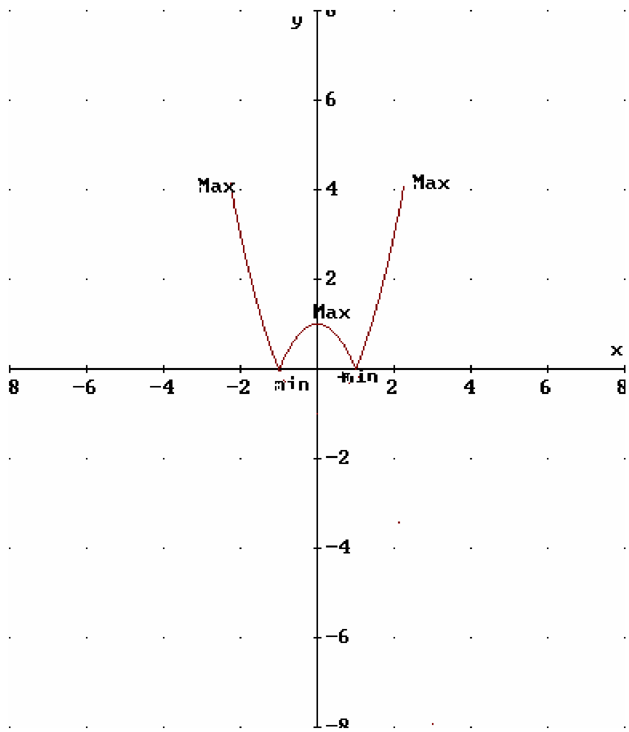
Analizamos la variabilidad de h:

$0 < h <1 \Rightarrow 1 < 2 - h < 2 \therefore -1 >- 2 + h > 2 \Rightarrow 1 < (-2 + h)^2 < 4$

$\Rightarrow 1 - (-2+h)^2 < 0 \;\Rightarrow\; \left|1-(-2+h)^2\right| = -1+ (-2+h)^2$, y en consecuencia:

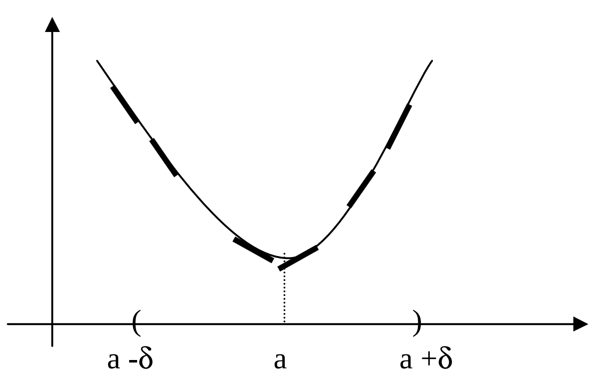
$\Delta y = \;-4 + (-2+h)^2 \;< 0$, pues $(-2+h)^2 < 4 \Rightarrow -4 + (-2+h)^2 < 0$

$\therefore \Delta y < 0 \Rightarrow$ en el punto T(-2,4) la función alcanza un máximo.

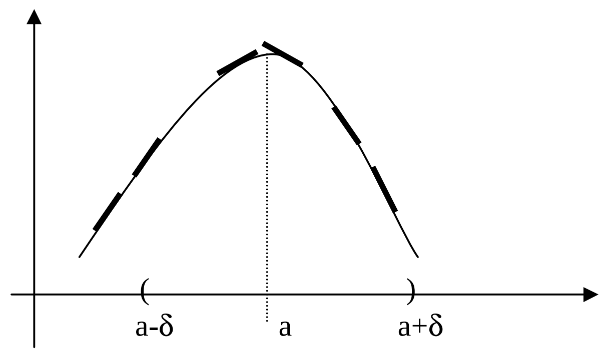


9.4.- Concavidad

- La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en (a, f(a)) si $\exists\, f'(a) \;\wedge\; \exists\, \aleph'_\delta(a)$ en el cual *la curva está por encima de su tangente*.



- La gráfica de una función f es cóncava hacia abajo en (a, f(a)) si $\exists f'(a) \;\wedge\; \exists\, \aleph'_\delta(a)$ en el cual *la curva está por debajo de su tangente*



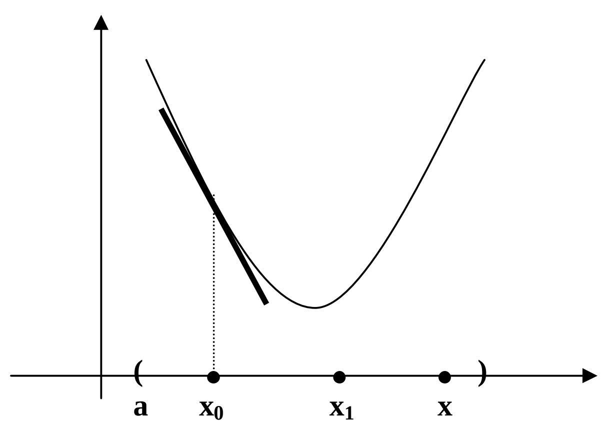
Teorema

Sea f una función derivable por lo menos dos veces en (a, b), y sea $x_0 \in$ (a, b). Si:

i) $f''(x_0) > 0$ cuando $x_0 \in$ (a, b) $\Rightarrow$ f es *cóncava hacia arriba* sobre (a,b).
ii) $f''(x_0) < 0$ cuando $x_0 \in$ (a, b) $\Rightarrow$ f es *cóncava hacia abajo* sobre (a,b).

Demostración:

i) La ecuación de la recta tangente en (x_0, f (x_0)) es:



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Esta recta existe por ser f derivable por hipótesis.
Sea g(x) = f(x) – y. Si probamos que g(x) > 0 $\forall$ x $\in$ (a, b), entonces f (x) > y $\forall$ x $\in$ (a, b), es decir, la curva está por arriba de su tangente.

Para esto hacemos:

$$g(x) = \mathbf{f(x)} - \mathbf{[}f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] = [f(x) - f(x_0)\mathbf{]} - f'(x_0)(x - x_0) \quad \mathbf{(1)}$$

Como por hipótesis $f''(x_0)$ existe $\forall\ x_0 \in (a, b)$, entonces f' es derivable y por lo tanto continua $\forall\ x \in (a, b)$ y f es derivable en (a, b).

$\therefore$ Podemos aplicar el T.V.M. en $[x_0, x] \subset (a, b)$.

Así $\exists\ x_1 \in (x_0, x)$ tal que:

$$\mathbf{f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(x_1)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)} \quad \mathbf{(2)}$$

Llevando **(2)** a **(1)** queda:

$$g(x) = f'(x_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \mathbf{[}f'(x_1) - f'(x_0)](x - x_0\mathbf{)} \quad \mathbf{(3)}$$

$f''(x_0) > 0$, por lo tanto $f'(x_0)$ es creciente $\forall\ x_0 \in (a, b)$.

Como $x_1 \in (x_0, x)$ será $x_0 < x_1 < x \quad \wedge \quad (x_0, x) \subset (a, b)$.

Así $\quad f'(x_0) < f'(x_1) < f'(x)$

$\therefore \quad f'(x_1) - f'(x_0) > 0 \quad$ cuando $\quad (x_1 - x_0) > 0$

$\therefore \quad g(x) = (f'(x_1) - f'(x_0))\,(x_1 - x_0) > 0$

O sea $g(x) > 0$ entonces $f(x) > y$ c.q.d.

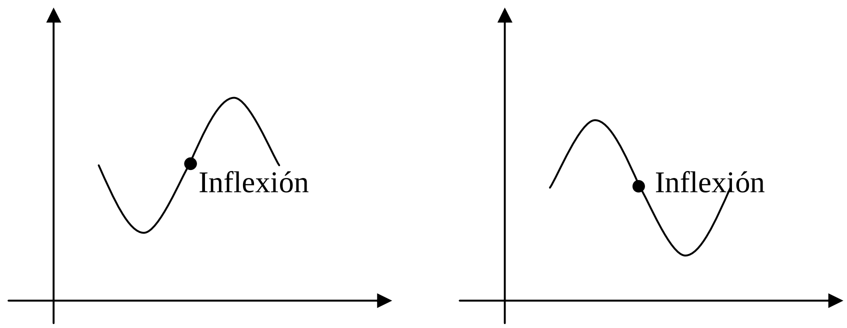
9.5.- Punto de inflexión

Un punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si existe la recta tangente en ese punto y un entorno del punto en el cual la gráfica cambia de concavidad.

Esto es:

$(x_0, f(x_0))$ es un *punto de inflexión* de la gráfica si

$$\exists\ \delta > 0: \begin{array}{ll} f''(x) > 0 & x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \wedge \\ f''(x) < 0 & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ & \vee \\ f''(x) < 0 & x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \wedge \\ f''(x) > 0 & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{array}$$



Teorema (Condición necesaria)

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f , si existe f'' entonces $f''(x_0) = 0$.

Demostración:

Por ser $(x_0, f(x_0))$ un punto de inflexión, suponemos que se cumple:

$f''(x) > 0 \qquad x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$\wedge$

$f''(x) < 0 \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Entonces

f' es creciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ $\wedge$ f' es decreciente en $(x_0 - \delta, x_0)$

Es decir f' presenta un mínimo en $x = x_0$. Por la condición necesaria de existencia de extremos, se cumple que:

$(f'(x_0))' = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = 0$ c.q.d.

Es equivalente a probar que:

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de f $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0 \vee \nexists\, f''(x_0)$

Por ejemplo: $y = x^3$

$y' = 3x^2$; $y'' = 6x$. Entonces vemos que un posible punto de inflexión es $x = 0$ puesto que allí la derivada de segundo orden vale 0. La derivada de primer orden en dicho punto existe y también vale 0, entonces la recta tangente a la curva de la función tiene en $x = 0$ una recta tangente de pendiente nula. Nos queda por ver si a derecha e izquierda del punto se produce un cambio de concavidad:

$f''(0 + h) = 6h > 0 \quad \wedge \quad f''(0 - h) = -6h < 0$

Podemos entonces concluir que en el punto de coordenadas (0, 0) la función presenta un *punto de inflexión.*

Otro ejemplo:

$y = x^{1/3}$

En este caso la derivada de primer y segundo orden nos quedan:

$y' = \dfrac{1}{3x^{2/3}}, \quad y'' = -\dfrac{2}{9x^{5/3}}$. Vemos que ambas se indeterminan en x = 0.

Para analizar si en el punto existe recta tangente, debemos evaluar las derivadas laterales. Como es una función continua, podemos utilizar el método simplificado:

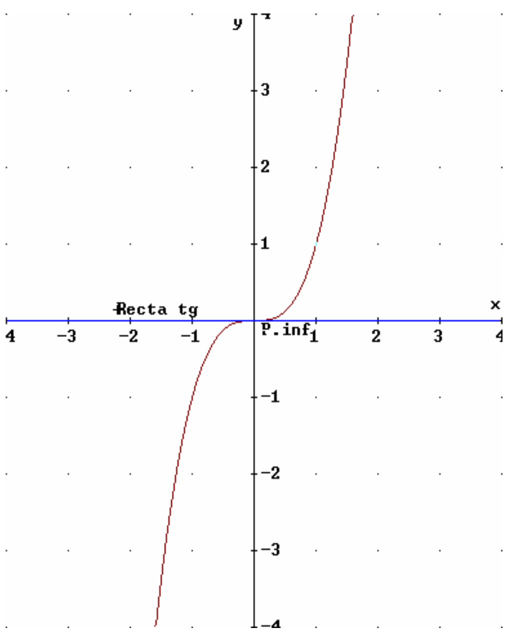
$f'_{+}(0) \to +\infty \quad \wedge \quad f'_{-}(0) \to +\infty$

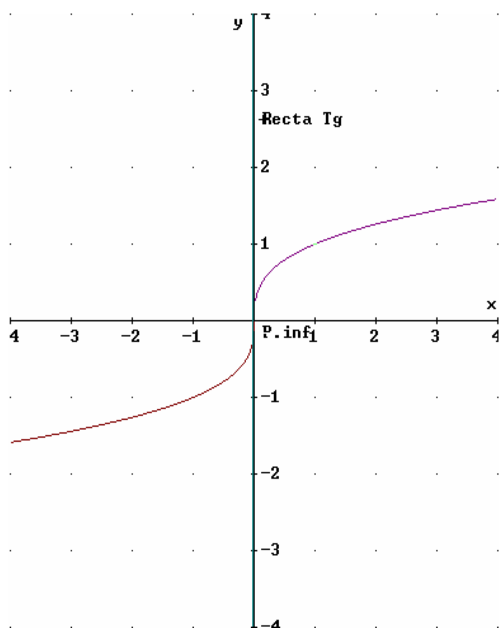
Por lo tanto, si bien la función no es derivable en x = 0, presenta una recta tangente vertical en ese punto.

Nos falta analizar si se produce un cambio de concavidad a los lados del punto en cuestión:

$f''_{+}(0) < 0 \quad \wedge \quad f''_{-}(0) > 0$

Por lo tanto en el punto de coordenadas (0,0) tenemos un *punto de inflexión.*





Grafica de la función $y = x^3$

Gráfica de la función $y = x^{1/3}$

Teorema (*Criterio de la derivada segunda*)

Sea $(x_0, f(x_0))$ un punto crítico de la función f en el cual $f'(x_0) = 0$ y $f'(x)$ existe $\forall x \in \aleph_\delta(x_0)$. Si f'' existe y:

1. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f tiene un *máximo* en x_0.
2. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f tiene un *mínimo* en x_0.
3. $f''(x_0) = 0 \;\wedge\; \forall x \in \aleph_\delta(x_0)$, $f''(x)$ cambia de signo $\Rightarrow$ no hay extremo en x_0.

Demostración:

1. Veamos la demostración de este item.
Por hipótesis $\exists f''(x)$ y además $f''(x_0) < 0$, entonces:

$$\mathbf{f''(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x) - f'(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} < 0 \quad .$$

Como $f'(x_0) = 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{x - x_0}} < 0$. Por propiedad de límite:

$\exists\, \delta$: $\frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{x - x_0}} < 0 \quad \forall x \in \aleph_\delta(x_0)$, entonces

$(\mathbf{f'(x)} < 0 \;\wedge\; x > x_0) \quad \vee \quad (\mathbf{f'(x)} > 0 \;\wedge\; x < x_0)$

$\therefore \mathbf{f'(x)} < 0 \;\wedge\; x_0 < x < x_0 + \delta \quad ; \quad \mathbf{f'(x)} > 0 \;\wedge\; x_0 - \delta < x < x_0$

Por lo tanto, hay un *máximo* en x_0 de acuerdo a la prueba de la primera derivada.

2. Idem a la anterior (ejercicio para el lector)

3. Veamos la demostración de este item

$\mathbf{f''(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x) - f'(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} = 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{x - x_0}} = 0$ y por hipótesis

$\exists\, \delta$:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{x - x_0}} > 0 \Rightarrow \mathbf{f'(x)} > 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{x - x_0}} < 0 \Rightarrow \mathbf{f'(x)} > 0$$

Entonces, la función es creciente y de acuerdo al criterio de la primera derivada, en x_0 *no tenemos máximo ni mínimo.*

9.6.- Ejemplos de aplicación de análisis de extremos en funciones

Realizar el análisis de los extremos en las siguientes funciones, realizando luego las gráficas correspondientes:

1. $\mathbf{y} = \dfrac{6\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}^2}$

El dominio de la función es D_f = R, ya que el denominador no se anula nunca.
Veamos si se cumple la condición necesaria para la existencia de extremos:

$$\mathbf{y'} = \frac{6+6\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x}^2}{(1+\mathbf{x}^2)^2} = \frac{6-6\mathbf{x}^2}{(1+\mathbf{x}^2)^2} = \frac{6(1-\mathbf{x}^2)}{(1+\mathbf{x}^2)^2}$$

Esta expresión se anula para $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Ambos valores son puntos críticos pues cumplen con la condición y pertenecen al dominio. Como la función es continua en dichos puntos, podemos aplicar el criterio del signo de la derivada primera para clasificarlos. Para ello factorizamos el numerador de la derivada primera y realizamos el análisis de signos a través de una tabla de la siguiente forma:

$$\mathbf{y'} = \frac{6(1-\mathbf{x}^2)}{(1+\mathbf{x}^2)^2} = \frac{6(1-\mathbf{x})(1+\mathbf{x})}{(1+\mathbf{x}^2)^2}$$

	x < -1	-1 < x < 1	1 < x
(1 – x)	+	+	-
(1 + x)	-	+	+
(1 + x^2)	+	+	+
Signo y'	-	+	-

Por lo tanto vemos que la función presenta en (-1, -3) un *mínimo* y en (1, 3) un *máximo* (queda para el alumno probar el resultado con los otros criterios de ser posible).

Nos queda por ver si existe algún punto de inflexión. Para ello encontramos la derivada segunda, que da por resultado haciendo las cuentas pertinentes:

$$\mathbf{y''} = 12\mathbf{x}\frac{\mathbf{x}^2 - 3}{(\mathbf{x}^2+1)^3}$$

Esta expresión se anula en: x = 0; $\mathbf{x} = \sqrt{3}$; $\mathbf{x} = -\sqrt{3}$ que pertenecen al dominio de la función.

Si observamos la expresión de la derivada segunda, vemos que el denominador es siempre positivo y el signo queda determinado por el numerador y el signo de (12x).

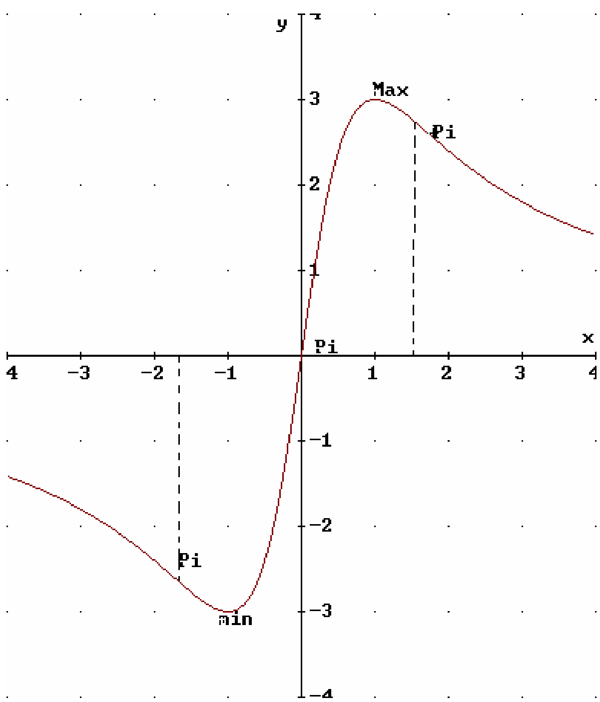
$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

12x	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +	+ + + + + + +
$x - \sqrt{3}$	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +
$x + \sqrt{3}$	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +	+ + + + + + +	+ + + + + + +
	(-)	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Vemos que para los tres valores, se producen cambio de signo a derecha y a izquierda de los mismos de la derivada segunda, y , como en los tres puntos la función es derivable (una vez), existe la recta tangente.

Por lo tanto, $x = -\sqrt{3}$; $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$, son las abscisas de los puntos de inflexión de acuerdo a la definición. Así los *puntos de inflexión* tienen como coordenadas: $(-\sqrt{3}, -3/2\sqrt{3})$; (0,0); $(\sqrt{3}, 3/2\sqrt{3})$.

Todos los resultados anteriores se reflejan en la siguiente gráfica:



Se observa los puntos: *Máximo* (Max) de coordenadas (1,3); *Mínimo* (min) de coordenadas (-1,-3); y los *Puntos de inflexión* (Pi) de coordenadas:

$(-\sqrt{3}, -3/2\sqrt{3})$; (0,0); $(\sqrt{3}, 3/2\sqrt{3})$

2. $f(x) = |9 - x^2|$

El dominio de esta función lo constituyen todos los reales. Para encontrar la función derivada vamos a expresar la función como una función por ramas, quedando:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 9 - \mathbf{x}^2 & \text{si} \quad 9 - x^2 \geq 0 \\ \mathbf{x}^2 - 9 & \text{si} \quad 9 - x^2 < 0 \end{cases}$$

Es decir que $f(x) = 9 - x^2$, si $-3 \leq x \leq 3 \;\wedge\; f(x) = x^2 - 9$, si $x < -3 \vee x > 3$.

Lo que se hizo para encontrar la función así definida, es simplemente aplicar la definición de valor absoluto, dando las condiciones de validez en los casos correspondientes.

Sabemos que la función módulo es continua en todos sus puntos, quedando para el lector probarlo para este caso. Encontremos ahora la derivada:

$f'(x) = -2x$, si $-3 < x < 3$ y $f'(x) = 2x$, si $x < -3$ o $x > 3$.

¿ Qué sucederá en $x = 3$ y $x = -3$?.

Como la función es continua en esos puntos, podemos ver en forma simple a que valores tienden las derivadas laterales en esos puntos de la siguiente forma:

- $\mathbf{f}'_{-}\mathbf{(}-3\mathbf{)} = -6$ y $\mathbf{f}'_{+}\mathbf{(}-3\mathbf{)} = 6$, entonces en $x = -3$ la función no posee derivada. Como pertenece al dominio, es un punto crítico, del cual podemos decir por el criterio de variación del signo de la primera derivada, que es un *mínimo*.

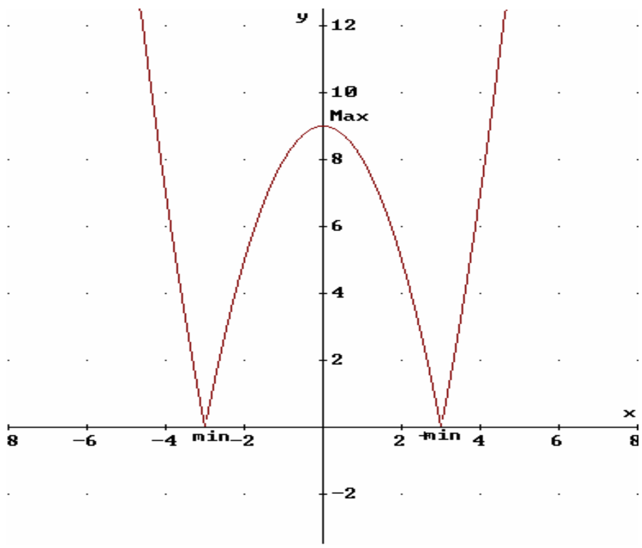
- $\mathbf{f}'_{-}\mathbf{(}3\mathbf{)} = -6$ y $\mathbf{f}'_{+}\mathbf{(}3\mathbf{)} = 6$, entonces en $x = 3$, siguiendo el mismo razonamiento anterior, vemos que también hay un *mínimo*.

Nos queda por ver para que valores de x se anula la primera derivada:

- Si analizamos la primera rama, tenemos: $f'(x) = -2x$, ésta se anula cuando $x = 0$. Como el punto $x = 0$ pertenece al dominio de esa rama, es también un punto crítico. Además la función es continua y derivable, entonces podemos aplicar el criterio del signo de la derivada segunda. Como: $f''(x) = -2 < 0$, entonces en $x = 0$ tenemos un *máximo*.

- Si analizamos la segunda rama, tenemos: $f'(x) = 2x$ que se anula cuando $x = 0$. Como el punto $x = 0$ no cumple con las condiciones del dominio en esta rama, entonces en ella no hay puntos críticos.

Los resultados anteriores se ven reflejados en la siguiente gráfica:



Se observa los puntos: *Máximo* (Max) de coordenadas (0,9); *Mínimos* (min) de coordenadas:
(-3,0) y (3,0).
En la gráfica (y analíticamente) se puede comprobar que la función tiene concavidad positiva en los intervalos (∞,-3) ∪ (3,∞) y concavidad negativa en el intervalo (-3,3). ¿Posee ésta función *puntos de inflexión*?. Justifique su respuesta.

3. f(x) = $\dfrac{x^3}{x^2-4}$

El dominio de esta función es $\Re-\{2,-2\}$. Se puede comprobar fácilmente que es una función impar, que posee asíntotas verticales en x = 2 y x = -2 y una asíntota oblicua que es la recta y = x. Ejercicio para el lector la verificación de las ecuaciones de las asíntotas verticales y la oblicua.

Encontremos ahora la expresión de la derivada primera:

$$f^{'}(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Esta expresión se anula para x = 0, x = $2\sqrt{3}$ y x = -$2\sqrt{3}$, valores que pertenecen todos al dominio de la función.

Observamos que el signo de la derivada de primer orden depende exclusivamente de (x^2-12). Como en los puntos críticos la función es continua (queda para usted el probarlo), vamos a aplicar el criterio de variación del signo de la derivada primera, para lo cual factorizamos la derivada primera como hicimos en los casos anteriores quedando:

$$f^{'}(x)=\frac{x^2(x\ -2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2}$$

- En x = 0, $f_{-}^{'}(0)<0 \quad \wedge \quad f_{+}^{'}(0)<0$, por lo que en el punto (0,0) no existe máximo ni mínimo.

- En x = $2\sqrt{3}$, $f_-{}'(2\sqrt{3}) < 0 \wedge f_+{}'(2\sqrt{3}) > 0$, entonces en el punto ($2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$) existe un *mínimo.*

- En x = -$2\sqrt{3}$, $f_-{}'(-2\sqrt{3}) > 0 \wedge f_+{}'(-2\sqrt{3}) < 0$, entonces en el punto ($2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$) hay un *máximo.*

Veamos ahora que sucede con los puntos de inflexión, para lo cual hallamos la derivada de segundo orden (verifíquela) :

$$f\,''(x) = \frac{8x\ (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

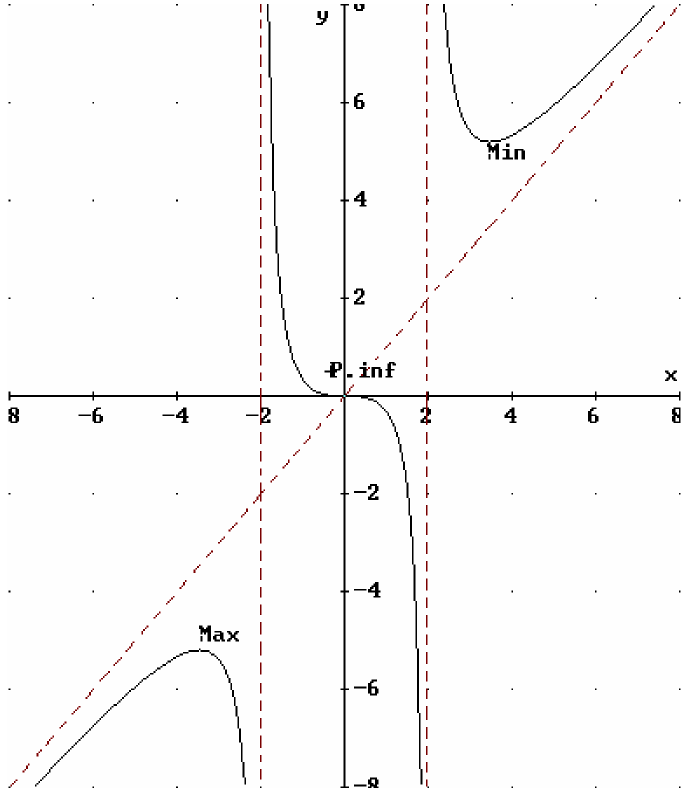
El único valor de x que anula esta expresión es x = 0, entonces es un posible punto de inflexión. Existe la derivada de primer orden en x = 0, entonces en ese punto hay recta tangente. Veamos que sucede con el signo de la derivada segunda:

	x < -2	-2 < x < 0	0 < x < 2	2 < x
8x	-	-	+	+
$x^2 + 12$	+	+	+	+
$(x – 2)^3$	-	-	-	+
$(x + 2)^3$	-	+	+	+
	(-)	(+)	(-)	(+)

Vemos que a derecha e izquierda de x = 0 se produce un cambio en la concavidad, entonces al cumplirse las tres condiciones, podemos decir que en el punto (0,0) tenemos un *punto de inflexión.*

Podemos visualizar mediante una gráfica los resultados obtenidos analíticamente. Hay que ser coherentes en los resultados obtenidos analíticamente para luego que sean compatibles con la gráfica. No tiene sentido en el Cálculo Diferencial que solo obtengamos la gráfica, que puede ser encontrada por medio de una calculadora gráfica o una computadora, si no sabemos de donde proviene la misma.

Cuidado !!!!. También hay cambio de concavidad a los lados de x = 2 y x = -2, pero estos valores de la variable x no están en el dominio de la función, por eso no son puntos de inflexión. Es por este motivo que en esos puntos la curva no tiene “recta tangente”, y por ende no se cumple la definición para que sean *“puntos de inflexión”*(otra justificación para la no existencia de puntos de inflexión)



4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x+2}\text{ si } x>-2\\ \dfrac{1}{x}\text{ si } x\le -2\end{cases}$

El dominio de esta función es $D_f=\Re$. Veamos si es continua en x = -2:

- $\exists\ f(-2)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\mathbf{x}^{\frac{2}{3}}}{\mathbf{x}+2}=+\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{\mathbf{x}}=-\dfrac{1}{2}$, por lo tanto no existe $\lim\limits_{x\to -2}\mathbf{f(x)}$

Entonces la función no es continua en x = -2, por lo tanto no es derivable en ese punto. Como x = -2 pertenece el dominio de a función es un punto crítico.
Encontremos ahora la expresión de la derivada primera:

$$f^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2} & si\ x>-2\wedge x\neq 0\\ -\dfrac{1}{x^2} & si\ x<-2\end{cases}$$

- En la primera rama, la derivada se anula en x = 4 y se indetermina en x = 0. Vemos que ambos valores cumplen con la condición de la rama, por lo que son puntos críticos.

- En la segunda rama, la derivada no se anula nunca y se indetermina en x = 0, pero este valor no cumple con el dominio de la rama, entonces no tenemos puntos críticos.

En resumen los puntos críticos son : (-2, -1/2); (4, $4^{\frac{2}{3}}/6$) y (0,0)

Analicemos el tipo de extremos:

- En (-2, -1/2) la función no es continua, entonces solo puede aplicarse el criterio del signo de Δy:

$$\Delta y^{+} = f(-2+\Delta x) - f(-2) = \frac{(-2+\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{-2+\Delta x+2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2+\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x} + \frac{1}{2} > 0$$

$$\Delta y^{-} = f(-2-\Delta x) - f(-2) = \frac{1}{-2-\Delta x} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2+\Delta x} + \frac{1}{2} > 0$$

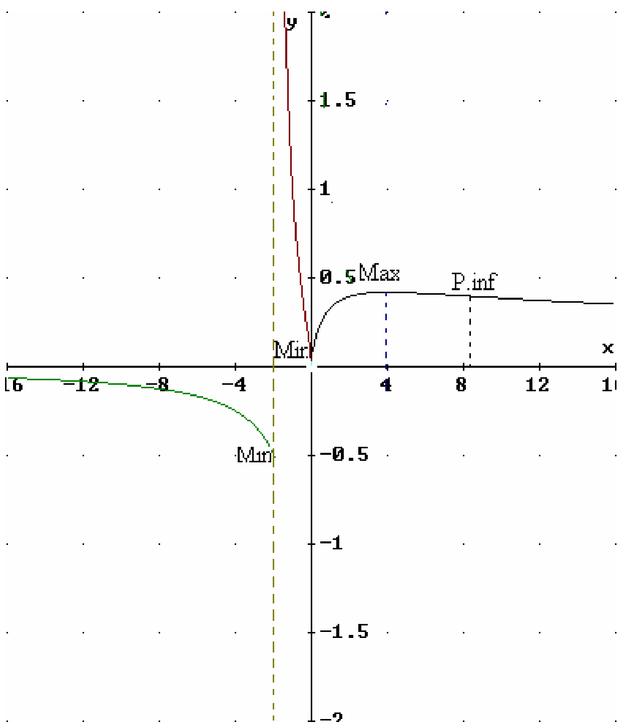
Por la definición de mínimo podemos afirmar que en (-2, -1/2) hay un *mínimo*.

- En (4, $4^{\frac{2}{3}}/6$) la función es continua y derivable, podemos aplicar el criterio del signo de la derivada segunda. La derivada de segundo orden es:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x^2-8x-2)}{9x^{\frac{4}{3}}(x+2)^3} & si\ x > -2 \wedge x \neq 0 \\ \dfrac{2}{x^3} & si\ x < \text{-}2 \end{cases}$$

Evaluando $f''(4) < 0$, por lo tanto en (4, $4^{\frac{2}{3}}/6$) tenemos un *máximo*.

- En (0,0) la función es continua pero no derivable, apliquemos el criterio de variación del signo de la derivada primera.
  Consideramos solo la primera rama, pues x = 0 pertenece a la misma. En un entorno de x = 0 el numerador es siempre positivo, mientras que en el denominador el único factor que varía de signo es $x^{\frac{1}{3}}$, el cual es negativo a la izquierda de x = 0 y positivo a la derecha. Entonces en el punto (0,0) tenemos un *mínimo*.



Queda por ver la existencia de puntos de inflexión.
En la expresión de la derivada de segundo orden vemos que la segunda rama nunca se anula, entonces allí no tenemos puntos de inflexión. En la primera rama, buscando las raíces del numerador encontramos que estas son aproximadamente iguales a x = 8.24 y x = -0.24. Para ambos valores de x existe la derivada de primer orden, es decir, existe recta tangente. Se puede comprobar numéricamente, que solo x = 8.24 cumple con la condición del cambio de la concavidad a derecha e izquierda de dicho valor. Por lo tanto, existe un único *punto de inflexión* y es el punto de coordenadas (8.24, 0.40).

9.7.- Problemas de Aplicación

1. *Si se lanza un proyectil (en el vacío), con una velocidad inicial v_0, desde un cañón que tiene un ángulo de elevación φ respecto de la horizontal, para hallar la distancia S recorrida por el mismo utilizamos la fórmula*:

$$\mathbf{R = f(\varphi) = [v_0^2 \, sen(2\varphi)] / g}$$

Donde g representa la aceleración de la gravedad. Determinar el ángulo φ con el cual la distancia R resultará máxima, para una velocidad inicial dada v_0.

Analicemos el máximo de f en el intervalo $0 \leq \varphi \leq \pi/2$:
$R'(\varphi) = [2v_0^2 \cos(2\varphi)] / g = 0$, es decir que el valor crítico de φ es π/4.
Como f es una función que no tiene problemas de continuidad ni derivabilidad, podemos aplicar el criterio del signo de la primera derivada para verificar que el valor de φ hallado produce una distancia R máxima, (el problema no está completo hasta haber realizado esta comprobación). Así, la derivada segunda nos queda:

$R''(\varphi) = [-4v_0^2 \, sen(2\varphi)] / g$, y reemplazando en ella $\varphi = \pi/4$, obtenemos:

$R''(\pi/4) = -4v_0^2/g < 0$. Por tanto, para un ángulo $\varphi = \pi/4$ la distancia alcanzada por el proyectil es máxima y vale $R(\pi/4) = v_0^2/g$.
Como el dominio tomado es un intervalo cerrado, nos queda por ver que sucede en los extremos del mismo, es decir cuando $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$, pero para estos valores nos queda $R(0) = 0$ y $R(\pi/2) = 0$, entonces el máximo hallado es precisamente el mayor valor de R.

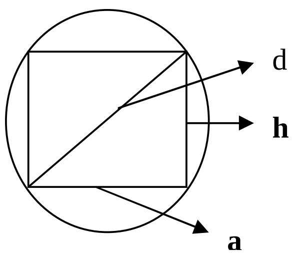
2. *La solidez de una barra de sección rectangular es directamente proporcional al ancho y al cubo de la altura de la sección transversal. Hallar el ancho de la barra de máxima solidez que podría ser cortada de un tronco de madera de 16cm de diámetro.*

Si llevamos a símbolos matemáticos el enunciado del problema, nos queda la expresión:

$S(a,h) = k.a.h^3$

Siendo: S = solidez o resistencia de la barra.
k = constante de proporcionalidad.
a = ancho de la barra.
h = altura de la sección transversal.

Vemos que la función que obtuvimos depende de dos variables: a y h. Como nosotros solo sabemos calcular extremos de funciones de una sola variable real, necesitamos algún dato extra que nos permita encontrar una relación entre ambas variables. En este ejercicio, nos dicen que la barra se obtiene cortando un tronco de madera, (que se supone circular), de 16 cm de diámetro.



Si pensamos en la sección transversal de la barra como un rectángulo inscripto en un círculo de radio igual a 8 cm, utilizando Pitágoras podemos plantear:

$a^2 + h^2 = (16)^2$, tomando al diámetro del círculo como la diagonal del rectángulo. Por lo tanto podemos hacer $h = [(16)^2 - a^2]^{1/2}$, tomando la raíz positiva pues la altura de un rectángulo nunca puede ser negativa.

De esta manera, reemplazando en la expresión de la función a extremar obtenemos:

$S = k.a.[(16)^2\text{-}a^2]^{3/2}$

Derivando para encontrar los puntos críticos:

$S' = k.[(16)^2\text{-}a^2]^{3/2} + k.a.(3/2).(-2a) .[(16)^2\text{-}a^2]^{1/2} = 0$

$k.[(16)^2\text{-}a^2]^{1/2}. [(16)^2\text{-}a^2 - 3a^2] = k.[(16)^2\text{-}a^2]^{1/2}.[(16)^2 - 4a^2] = 0$

Entonces tenemos que:

$(16)^2 - a^2 = 0 \vee (16)^2 - 4a^2 = 0$, de donde surge que los valores críticos son:
$a_1 = 16$, $a_2 = -16$, $a_3 = 8$, $a_4 = -8$. Descartamos los valores negativos siguiendo el mismo razonamiento que con la altura, y nos quedan solo dos valores a probar:
$a_1 = 16$ y $a_3 = 8$.
Observemos por un momento la expresión de la función a extremar. Su dominio abarca los valores: $-16 \leq a \leq 16$, por lo tanto ambos valores obtenidos se encuentran en el

mismo. Sin embargo, cuando a = 16cm la solidez es nula, por lo que nos quedamos solo con a = 8cm.
Queda ahora por verificar por algún criterio que para un ancho de 8cm la solidez es máxima. Si utilizamos el criterio de variación del signo de la primera derivada, primeramente “acomodamos” adecuadamente la expresión de la misma, quedando:

$\mathbf{S^{'} = k.[(16)^2 - a^2]^{1/2}.[16 - 2a].\ [16 + 2a]}$

Como k, el segundo y el cuarto factor son positivos, analizamos que sucede con el factor restante (16 – 2a), en un entorno de a = 8, obteniendo $S^{'}(8)^{+} < 0$ y $S^{'}(8)^{-} > 0$, por lo que podemos concluir que cuando a = 8cm la solidez es máxima.

10.- BIBLIOGRAFÍA

[1] ALSINA, C – “Una Matemática Feliz” – Red Olímpica” – 1995.

[2] EDWARDS Y PENNEY – Cálculo con Geometría Analítica – Prentice Hall – 1996

[3] GUZMÁN, M; ALSINA,C – “Los matemáticos no son gente seria” – Rubes – 1996

[4] GUZMÁN, M; RUBIO,B. – “Problemas, conceptos y métodos del ANÁLISIS MATEMÁTICO, estrategias del pensamiento matemático” – Volumen 1 – Pirámide

[5] LARSON, HOSTETLER, EDWARDS – Cálculo Vol I y Vol II – Mc Graw Hill – 1996

[6] LEITHOLD, L. – Cálculo con Geometría Analítica – Haria – 1992

[7] PURCEL, E; VARBERG, D. – Calculo Diferencial e Integral – Prentice Hall **-** 1993

[8] STEWARD – Cálculo – Mc Graw Hill **-** 1998

[9] TAYLOR Y WADE – Cálculo Diferencial e Integral

[10] WATSON, F. – “Cálculo Avanzado” – Limusa Wiley – 1970

[11] - 1993

INDICE

PREFACIO....0
I.- INTRODUCCIÓN....2
2.- RECTA TANGENTE Y NORMAL AL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN 2
2.1.- Definiciones de recta tangente y normal....2
Definición: 3
2.2.- Ejemplos de aplicación de recta tangente y normal....4
3.- RAZON DE CAMBIO 7
4.- VELOCIDAD Y ACELERACIÓN....9
4.1.- Definiciones....9
4.2.- Ejemplos de aplicación de velocidad y aceleración....12
5.- TEOREMA DE ROLLE 14
Interpretación Geométrica 15
Observaciones....15
6.- TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS....17
6.1.- Teorema de los Incrementos Finitos ó Teorema de Lagrange 17
Interpretación Geométrica 18
6.2.- Distintos modos de expresar el Teorema del Valor Medio....19
6.3.- Teoremas basados en el Teorema del Valor Medio....20
Teorema 1 20
Teorema 2 21
Definición 21
Teorema 3 21
Teorema 4 21
Teorema 5 21
Teorema 6 22
6.4.- Ejemplos de aplicación del Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio....22
6.5.-Generalización del Teorema del Valor Medio 23
7.- TEOREMA DE CHAUCHY 24
8.- REGLA DE L'HOSPITAL 27
8.1.- Teoremas acerca de la regla de l'hospital 27
Teorema 1 27
Teorema 2 28
Teorema 3 29
Teorema 4 30
Observaciones....30
8.2.- Generalizaciones....31
8.2.1.- Primer caso 31
8.2.2.- Segundo caso 31
8.3.-Distintas formas de indeterminación 32
8.3.1.-Forma $(0.\infty)$ 32
8.3.2.- Forma $(\infty - \infty)$ 32
8.3.3.- Formas Exponenciales: (∞^0) ; (0^0) ; (1^∞) 33
8.4.- Ejemplos de L'Hospital....34
9.- MÁXIMOS Y MINIMOS....36
9.1.- Definición de Máximo y Mínimo Relativo 36
Definición 36

Definición 37
9.2.- Teorema: Condición necesaria de extremos..38
Definición 39
9.3.- Condición suficiente para la existencia de extremos. 40
Teorema 40
9.4.- Concavidad 45
Teorema 46
9.5.- Punto de inflexión 47
Teorema (Condición necesaria) 48
Teorema (*Criterio de la derivada segunda*) 50
9.6.- Ejemplos de aplicación de análisis de extremos en funciones 51
9.7.- Problemas de Aplicación..58
10.- BIBLIOGRAFÍA 61